9

IL LIMITE CLASSICO

Considerazioni per una descrizione di tipo classico

Il limite classico della teoria quantistica dei campi può essere inteso in due modi: il primo è quello che mette in evidenza il comportamento ondulatorio classico nel quale non ci accorgiamo dell'interazione quantizzata, il secondo è quello che pone l'attenzione sull'aspetto particellare e ne studia il comportamento per capire quando è possibile pensare al quanto in termini vicini a quello di particella classica.

Il primo caso è, per così dire, la condizione dalla quale siamo partiti in questo scritto: quello della descrizione ondulatoria di campi anche materiali non quantistici; ingenerale si può dare ogni volta che trattiamo fasci non interagenti sufficientemente intensi dal non doverci preoccupare del numero di quanti ma anche sufficientemente diluiti da non dover considerare le autointerazioni (per di più esibenti una statistica non particolarmente "patologica", insomma vicina a quella degli stati coerenti). Visto che di questo tipo di limite abbiamo già scritto nei primi capitoli, qui non ne parleremo oltre.

Per il secondo caso ci sembra utile metterci nel contesto della meccanica quantistica, la quale adotta già una terminologia particellare più vicina a quella della fisica classica (e, inoltre nella quale il numero di quanti rimane fissato e, nel nostro caso è uno). Ci chiediamo, quindi: in quali condizioni la fisica classica per una particella costituisce una buona approssimazione della meccanica quantistica, sempre di una particella?

Possiamo dividere il problema in due punti:

- il primo legato alla ricerca di stati quantistici che ammettono una descrizione vicina a quella classica;
- il secondo legato alla ricerca di evoluzioni di tipo quantistico che si possono approssimare con leggi di evoluzione classiche.

Per quanto riguarda il primo punto possiamo ritenere che si possa passare da una descrizione quantistica ad una classica ogni volta che lo stato della particella quantistica possa essere approssimato da una posizione media $<x>$ e da una quantità di moto media $<p>$ in maniera che le fluttuazioni attorno a tali valori medi sia trascurabili; ciò è possibile, di fatto, a seconda del potere risolutivo degli strumenti per effettuare le misure.

Dividiamo il nostro studio in due parti: una riguardante la particella libera e l'altro la particella in un campo di forze. In un paragrafo finale considereremo, quindi, un approccio appena diverso: quello del limite dell'ottica geometrica.

Particella libera

Consideriamo un pacchetto d'onde (per semplicità monodimensionale) con pulsazione centrata attorno a ω_0, descrivente una sola particella, allora, dalle relazioni di De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}; \qquad E = h\nu \tag{9.1}$$

ricaviamo per la velocità di fase (velocità della singola componente monocromatica), con ovvia simbologia:

$$\mathrm{v}_f = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{2\pi\nu_0}{\frac{2\pi}{\lambda_0}} = \frac{\frac{E_0}{h}}{\frac{p_0}{h}} = \frac{E_0}{p_0} . \tag{9.2}$$

Ricordiamo ora che, almeno per una particella non relativistica in assenza di forze esterne, il legame tra l'energia E del quanto e la sua quantità di moto p è:

$$E = \frac{p^2}{2m} . \tag{9.3}$$

Allora, dalla (9.2) otteniamo

$$\mathrm{v}_f = \frac{p_0^2}{2mp_0} = \frac{p_0}{2m} . \tag{9.4}$$

Per quanto riguarda la velocità di gruppo (velocità con cui si muove l'inviluppo del pacchetto), invece, si ha:

$$\mathrm{v}_0 = \frac{d\omega}{dk}(\omega_0) = \frac{d\left(\frac{E}{h}\right)}{d\left(\frac{p}{h}\right)}(p_0) = \frac{d\left(\frac{p^2}{2m}\right)}{dp}(p_0) = \frac{p_0}{m} . \tag{9.5}$$

Come si vede la velocità di fase e la velocità di gruppo sono diverse, e il legame "corretto" tra velocità e quantità di moto è evidentemente quello dato dalla (9.5). La differenza tra velocità di fase e di gruppo indica poi che il vuoto, per i campi materiali, è un mezzo dispersivo (come già sappiamo da quando abbiamo discusso le implicazioni della natura complessa dell'equazione di Schrödinger nel cap. 8); perciò un pacchetto descrivente una particella che si propaga liberamente non rimarrà indeformato ma, anzi, si allargherà col passare del tempo e, dopo un tempo t sufficientemente lungo, si potrà trascurare la larghezza iniziale del pacchetto. In tal caso, la dimensioni del pacchetto d'onde tempo t saranno:

$$\Delta x(t) \approx \frac{\Delta p}{m} t . \tag{9.6}$$

Come abbiamo già detto, un pacchetto descrivente una particella singola può essere descritto come una "particella classica" se la sua larghezza può essere considerata piccola rispetto alla distanza percorsa dal pacchetto; tale distanza è $\mathrm{v}_0 t$; perciò, ricordando per la (9.6), questo accade se:

$$\frac{\Delta p}{m} t << \frac{p_0}{m} t \tag{9.7}$$

cioè se

$$\Delta p << p_0 , \tag{9.8}$$

e, quindi, per le relazioni di Heisenberg se

$$\frac{\hbar}{\Delta x} << p_0 = \frac{h}{\lambda_0} \tag{9.9}$$

da cui si trova

$$\Delta x >> \frac{\lambda_0}{2\pi} . \tag{9.10}$$

Si ha così che la condizione perché un quanto materiale libero possa essere descritto classicamente, in particolare gli si possa attribuire una cinematica di tipo classico, è che valga la (9.10), e cioè che l'incertezza sulle misure di posizione sia molto maggiore della lunghezza d'onda media del pacchetto d'onde. Se volessimo poi tornare "indietro" per rileggere il significato della (9.6) alla luce della teoria quantistica dei campi dovremmo ricordarci che la meccanica quantistica si può considerare un opportuno caso limite della teoria dei campi nel caso in cui si possa trascurare sia l'interazione sia l'auto interazione della perturbazione del campo; si sia in un regime non relativistico (così che valga la legge di conservazione della massa); e lo stato del campo sia uno stato ad un solo (o al più ad un numero fissato di quanti). Per un pacchetto a minima indeterminazione, cioè per un pacchetto per il quale:

$$\Delta x \Delta p \approx h \tag{9.12}$$

La (9.6) diventa[i]:

$$\Delta x(t) \approx \frac{\Delta p}{m} t \approx \frac{1}{m} \frac{h}{\Delta x} t . \tag{9.13}$$

Può essere utile provare a fare qualche considerazione numerica a partire dalla (9.13): ad esempio un elettrone localizzato con la precisione del decimo di millimetro (per esempio in un pennello di raggi in un tubo catodico o in un microscopio elettronico) ha una "velocità di sparpagliamento del pacchetto" di circa 10m/s e, perciò, se avesse ad esempio energia di circa 1keV dovrebbe percorrere un centinaio di metri prima che il pacchetto si allarghi approssimativamente di una quantità uguale alla larghezza iniziale; distanza certamente di gran lunga superiore alla lunghezza del tubo catodico!

Particella in un campo di forze esterno

Anche in questo caso consideriamo il problema monodimensionale. Come si può trovare in ogni buon testo sull'argomento, in meccanica quantistica si dimostra li cosiddetto teorema di Ehrenfest, che nel caso di una particella monodimensionale, prende la seguente forma:

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{x}\rangle=\frac{1}{m}\langle\mathbf{p}\rangle$$
$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{p}\rangle=\langle F(\mathbf{x})\rangle\equiv-\left\langle\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x}\right\rangle \quad . \tag{9.14}$$

Le precedenti equazioni si riconducono a quelle classiche se e solo se.

$$\langle F(\mathbf{x})\rangle=F(\langle\mathbf{x}\rangle)\,, \tag{9.15}$$

e ciò è possibile solo se la “forza” *F* è una funzione lineare della posizione, il che dà luogo alle seguenti tre possibilità:

- la particella è libera
- la particella è soggetta ad una forza costante
- la particella è soggetta ad una forza armonica.

In tutti gli altri casi la condizione (9.15) può essere soddisfatta solo in maniera approssimata. Per capire come vanno le cose possiamo sviluppare *F* attorno a <**x**>, si ha così:

$$F(x)=F(\langle\mathbf{x}\rangle)+\frac{dF}{dx}(\langle\mathbf{x}\rangle)\left(x-\langle\mathbf{x}\rangle\right)+R(x-\langle\mathbf{x}\rangle)\,. \tag{9.16}$$

Dalla (9.16) segue subito:

$$\langle F(x)\rangle=F(\langle\mathbf{x}\rangle)+\langle R(x-\langle\mathbf{x}\rangle)\rangle\,. \tag{9.13}$$

Ora

$$\langle R(x-\langle\mathbf{x}\rangle)\rangle\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}R(x-\langle\mathbf{x}\rangle)|\psi(x)|^2\,dx \tag{9.18}$$

e questo significa che la nostra condizione di comportamento quasi classico (9.16) risulta quasi verificata se $\langle R(x-\langle\mathbf{x}\rangle)\rangle$, dato dalla (9.18), è piccolo rispetto a *F*(<**x**>), e cioè se *R* è sufficientemente piccolo nella regione in cui $|\psi(x)|^2$ è “grande”. Insomma il potenziale cui è soggetta la particella deve essere al più quasi armonico nella zona in cui il pacchetto che descrive la particella è concentrato. Se approssimiamo *R* al suo primo termine (cioè alla derivata seconda della forza) si ha immediatamente:

$$\langle R(x-\langle\mathbf{x}\rangle)\rangle=\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dx^2}(\langle x\rangle)\left(\Delta\mathbf{x}\right)^2\,. \tag{9.19}$$

La condizione (9.16) si scrive così (trascurando un ininfluente fattore ½):

$$\frac{d^2F}{dx^2}(\langle\mathbf{x}\rangle)<<\frac{F(\langle\mathbf{x}\rangle)}{\left(\Delta x\right)^2}\,. \tag{9.20}$$

Tenendo conto di quanto anche di quello che abbiamo detto nel paragrafo precedente, e

forzando un po' le cose, possiamo dire che vale una descrizione di tipo "classico" se valgono contemporaneamente le (9.13) e (9.20).
Da quanto scritto in queste pagine si capisce come la condizione di "classicità" non possa per nulla essere soddisfatta qualora il pacchetto d'onde venga diviso in due e si propaghi lungo due cammini ottici molto distanti tra loro, come accade ad esempio negli interferometri, o quando il pacchetto viene diffratto; in tali casi l'approssimazione classica proprio non funziona. Non funziona, però, neppure quando il potenziale cui è soggetto il pacchetto vari molto rapidamente su distanze dell'ordine della lunghezza d'onda centrale del pacchetto.

Approssimazione classica ed equazione dell'iconale

Proviamo a rivedere le stesse cose da un punto di vista leggermente differente. Ci mettiamo, infatti, dal punto di vista semiclassico che ha caratterizzato la nostra presentazione nei primi capitoli, quello, per intenderci nel quale la propagazione libera è descritta da un'equazione delle onde e l'interazione del pennello ondulatorio con un rivelatore è, invece, quantizzata. La domanda che ci poniamo è: in quali casi possiamo pensare che il quanto abbia una sua cinematica di tipo "classico"? Cioè in quali casi possiamo ragionevolmente pensare ad un quanto come ad una particella classica o quasi?
Partiamo, per questo, dall'equazione di Schrödinger per un campo non quantistico (cfr. (4.49 e (4.50)):

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H}\psi \tag{9.21}$$

essendo **H** così definito:

$$\mathbf{H} \equiv -\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + U(\underline{x},t)\,. \tag{9.22}$$

Ci chiediamo quale sia il legame tra le (9.21) e (9.22) e la seconda legge di Newton. Scriviamo il nostro campo complesso mettendone in evidenza ampiezza e fase, scriviamo cioè:

$$\psi(\underline{x},t) \equiv A(\underline{x},t)e^{i\vartheta(\underline{x},t)}\,. \tag{9.23}$$

Sostituendo la (9.23) nella (9.21) e tenendo conto della (9.22), dopo aver separato parte reale e parte immaginaria, si ha[ii]:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}\left(\underline{\nabla}\cdot\vartheta\right)^2 + U = \frac{1}{2\mu}\frac{\nabla^2 A}{A} \tag{9.24}$$

$$\mu\frac{\partial A}{\partial t} + \underline{\nabla}A\cdot\underline{\nabla}\cdot\vartheta + \frac{A}{2}\nabla^2\vartheta = 0\,. \tag{9.25}$$

Moltiplicando la (9.25) per $2A$ si ottiene la cosiddetta equazione di continuità (già ricavata nel cap. 4 in assenza di potenziali):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\underline{\nabla}\cdot\underline{j}=0\,, \qquad (9.26)$$

essendo:

$$\rho(\underline{x},t)\equiv A^2(\underline{x},t); \qquad \underline{j}\equiv\rho(\underline{x},t)\underline{\mathrm{v}}(\underline{x},t); \qquad \underline{\mathrm{v}}(\underline{x},t)\equiv\frac{\underline{\nabla}\vartheta(\underline{x},t)}{\mu}\,. \qquad (9.27)$$

E' interessante osservare che la (9.26) non dipende dal potenziale e, inoltre, che se il campo materiale invece che da una funzione complessa fosse descritto da una funzione reale allora la velocità del "fluido", di cui la (9.26) rappresenta l'equazione di continuità, sarebbe nulla.
Per studiare il significato dell'equazione (9.24) conviene porre:

$$Q\equiv-\frac{1}{2\mu}\frac{\nabla^2 A}{A}\,; \qquad (9.28)$$

infatti in tal modo la (9.24) si scrive:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+\frac{1}{2\mu}\left(\underline{\nabla}\cdot\vartheta\right)^2+U+Q=0\ . \qquad (9.29)$$

Prendendo allora il gradiente di entrambi i membri della (9.29) si ottiene:

$$\mu\frac{d\underline{\mathrm{v}}}{dt}=-\underline{\nabla}\left(U+Q\right), \qquad (9.30)$$

equazione formalmente equivalente alla seconda legge di Newton se si interpreta il termine Q come un particolare potenziale detto potenziale quantistico (è lo stesso considerato nella teoria di Bohm) e μ come massa di una qualche particella. Nel limite in cui tale termine è trascurabile la (9.30) descrive un fluido che obbedisce alle leggi di Newton "classiche".
Consideriamo ora il caso di onde stazionarie, supponiamo, cioè, che ψ sia una soluzione stazionaria dell'equazione delle onde di Schrödinger (tanto poi la soluzione generale sarà una opportuna combinazione lineare di queste):

$$\psi(\underline{x},t)\equiv A(\underline{x})e^{i\vartheta_s(\underline{x})}e^{-i\omega t}\,. \qquad (9.31)$$

In tal caso la (9.24) diventa:

$$\left(\underline{\nabla}\vartheta_s\right)^2=\frac{1}{\lambda\!\!\!^{-2}}\left(1+\lambda\!\!\!^{-}\frac{\nabla^2 A}{A}\right), \qquad (9.32)$$

avendo posto:

$$\lambda\!\!\!^{-}\equiv\frac{1}{2\mu\left(w-U\right)}\,. \qquad (9.33)$$

Se ora vale la condizione

$$ƛ\frac{\nabla^2 A}{A} << 1, \tag{9.34}$$

la (9.32) diventa

$$\left(\underline{\nabla}\vartheta_s\right)^2 = \frac{1}{ƛ^2}. \tag{9.35}$$

Se ora, nell'espressione di $\vartheta_s(x)$ mettiamo in evidenza la pulsazione, scriviamo cioè:

$$\vartheta_s(x) = \omega S(\omega, x), \tag{9.36}$$

la (9.35) diventa:

$$\left[\underline{\nabla}S(\omega, x)\right]^2 = n^2(\omega, x), \tag{9.36}$$

essendo n l'indice di rifrazione del mezzo. La (9.36) prende il nome di equazioni dell'iconale; essa vale nel limite in cui vale la (9.34) che è detta approssimazione dell'iconale e rappresenta l'approssimazione dell'ottica geometrica, nella quale la propagazione può essere descritta da raggi perpendicolari ai fronti d'onda. Notiamo che la (9.36) non dipende più da A, come invece accade nel caso generale della (9.32). In tale condizione la fisica quantistica può essere approssimata da particelle "classiche" che si muovono lungo le traiettorie date da raggi ortogonali ai fronti d'onda, i quali sono individuati dalle superfici:

$$S(\omega, \underline{x}) = \frac{2m\pi}{\omega} + t; \qquad m \in N. \tag{9.37}$$

Infatti è sempre possibile associare un potenziale $U(\underline{x})$ all'indice di rifrazione del mezzo in maniera tale che i raggi nel mezzo coincidano con le traiettorie di particelle materiali soggette a quel potenziale[iii].
Insomma possiamo dire che nel limite nel quale l'ottica ondulatoria si può approssimare con l'ottica geometrica la descrizione quantistica si può approssimare con quella classica. Invece, nel caso di un potenziale confinante, nei punti di inversione del moto classico nei quali (cfr. (9.33)) $ƛ$ diverge (e, in generale è mal definita anche la quantità di moto quantistica, l'approssimazione dell'iconale non può certamente valere).
Il significato di quanto stiamo dicendo qui è appena diverso da quello espresso nel paragrafo precedente, in quanto là eravamo concentrati sulla traiettoria di un singolo quanto, qui, invece, siamo interessati alla condizione, in un certo senso meno vincolante, dell'esistenza di traiettorie (anche senza stare a seguire nel dettaglio particella per particella).
Quanto visto sin qui spiega, ad esempio, perché negli acceleratori di particelle la propagazione del fascio prima dell'interazione viene descritta in termini sostanzialmente classici. Infatti in un acceleratore di particelle si hanno fasci descritti da pacchetti d'onda di grande energia per quanto (quindi con lunghezze d'onda centrali del pacchetto molto piccole) soggetti a forze elettriche e magnetiche variabili molto lentamente sulla scala di queste lunghezze e, inoltre, questi fasci non vengono separati lungo cammini diversi e poi ricomposti…si è, quindi, proprio nel caso dell'approssimazione dell'ottica geometrica che permette di associare ai "raggi" ottici materiali la traiettoria delle particelle… Si capisce, così,

perché la terminologia di tutti gli studiosi di fisica delle alte energie sia così “particellare” e piena di termini completamente ripresi dalla fisica del punto materiale.
Il discorso che abbiamo svolto sin qui è stato fatto a partire da un’equazione delle onde non relativistica, però, a parte la possibilità della creazione di coppie di particelle materia-antimateria, le conclusioni e le equazioni cui siamo arrivati sono abbastanza generali.
Proviamo a utilizzarle in un caso concreto sempre di fisica delle particelle per convincerci di quanto stiamo dicendo: per un elettrone ultrarelativistico (cioè quando la sua energia è molto maggiore della sua massa a riposo che è di circa 0.5 MeV), la relazione tra energia e quantità di moto è data da

$$E = pc. \tag{9.38}$$

Per esso, allora, la relazione (9.9) si scrive:

$$\Delta x \gg \frac{h}{2\pi p_0} = \frac{\hbar c}{E_0}. \tag{9.39}$$

Le tipiche energie utilizzate all’acceleratore LEP del CERN erano dell’ordine dei 100 GeV. Sostituendo nella (9.39) tale valore si ha che per tali energie si può utilizzare una descrizione di tipo classico se la precisione delle nostre misure di posizione Δx è tale che $\Delta x \gg 10^{-18}\,\mathrm{m}$, e questo, come ben si capisce, è senz’altro il nostro caso.

NOTE CAPITOLO 9

[i] Picasso L. E., "*Lezioni di Meccanica Quantistica"*, Edizioni ETS, Sesto Fiorentino (FI) (2000), pagg. 149-152.

[ii] Previdi F., Piovella N., "*Appunti del corso di Istituzioni di Fisica Teorica del Prof. R. Bonifacio*", CUSL, Milano (2001), pagg.18-22.

[iii] Per una particella materiale di energia cinetica E_0 nel punto x_0 il legame tra potenziale e indice di rifrazione è dato da (cfr. Rossi B. *"Ottica*", Masson Italia Editori, Milano (1981), 65):

$$U(x) = U(x_0) + [n^2(x_0) - n^2(x)]E(x_0)\,. \qquad (9.i)$$