

## IL LIMITE DELLA MECCANICA QUANTISTICA

### Il passaggio alla meccanica quantistica

Nel precedente capitolo abbiamo visto brevemente alcuni punti importanti della teoria quantistica dei campi: l'elemento centrale della teoria è il campo quantizzato che obbedisce ad una precisa equazione delle onde.

In situazioni particolarmente semplici, però, possiamo ragionare in modo diverso e spostare la nostra attenzione dal campo al quanto. Supponiamo, per esempio, che la perturbazione del campo in oggetto sia di così debole intensità da potersi considerare interagente tramite un solo quanto di bassa energia. Allora, possiamo schematizzare questa situazione nel seguente modo: la propagazione libera sarà esattamente descritta dall'equazione delle onde cui il campo obbedisce (osserviamo che nelle nostre ipotesi siamo sicuramente nella migliore situazione possibile: quella di non autointerazione); l'interazione con un rivelatore avverrà, allora, tramite un solo quanto, così che l'aspetto statistico emergerà nella maniera più semplice possibile perché l'interazione avverrà in un singolo evento, come si dice comunemente, con una singola particella. Per convincersi della cosa basta pensare agli esperimenti a singolo quanto descritti nel cap. 6, nei quali si vede chiaramente che la rivelazione di un quanto ha carattere aleatorio ma la ripetizione dell'esperimento un quanto alla volta genera un *pattern* riproducibile. Possiamo, allora, in qualche modo, confondere la fisica di quella perturbazione del campo che interagisce tramite un solo quanto con la fisica del quanto *tout court* e concentrare tutta la nostra descrizione fisica sul quanto in oggetto.

Infatti, per quanto detto fin qui sulla natura probabilistica dell'interazione fra quanti, non è difficile reinterpretare la teoria di campo libera prima sviluppata, pensandola riferita ad un solo quanto in modo da fare emergere la teoria statistica di una particella non relativistica.

Possiamo, cioè, interpretare la teoria delle onde sviluppata come teoria statistica relativa ad una collezione statistica di esperimenti a singola particella e rileggere, per esempio, la quantità  $|\psi(\underline{x}, t)|^2$ , che nel cap. 4 era legata alla densità di massa del continuo materiale, come densità di probabilità di trovare, in una misura di posizione, la particella nel punto  $\underline{x}$  al tempo  $t$ . In tal modo, infatti, l'evidenza fenomenologica che ci dice che i valori medi tendono ai valori classici viene naturalmente spiegata. Perché ciò sia possibile deve, però, ovviamente valere la condizione:

$$\int d^3x |\psi(\underline{x}, t)|^2 = 1. \quad (8.1)$$

che ci assicura che la particella verrà trovata da qualche parte con certezza e che, fra l'altro, pone delle importanti restrizioni sulle soluzioni ammissibili dell'equazione delle onde: esse andranno cercate fra quelle  $\psi(x, t)$  tali che:

$$\int d^3x |\psi(\underline{x},t)|^2 = \text{cost} < +\infty. \quad (8.2)$$

La linearità dell'equazione ci assicura poi che sia sempre possibile ricondurci al caso (8.1). Si capisce così come si giunga rapidamente alla ben nota interpretazione di Born dell'equazione di Schrödinger.

Non cercheremo qui di fornire un riassunto di meccanica quantistica; per questo si rimanda il lettore ad un qualsiasi buon testo di cui è pieno il mercato. Vogliamo soltanto riassumere alcuni punti importanti di questa teoria per poterne fare qualche riflessione a fini didattici e per poterne mettere in evidenza le somiglianze, le differenze e i punti di contatto, sia con la meccanica classica che con la teoria quantistica dei campi.

In queste prossime righe indicheremo come si possa arrivare, a partire dalla teoria quantistica dei campi, al limite della meccanica quantistica, nel caso in cui il campo sia sufficientemente diluito e i suoi stati evolvano (siamo quindi anche in un limite non relativistico) in un sottospazio dello spazio di Fock che sia autospazio dell'operatore numero.

### ***Il limite della meccanica quantistica***

Consideriamo la funzione di correlazione a tempi uguali delle misure di densità effettuate in due punti distinti  $x_1$  e  $x_2$  (la generalizzazione a  $N$  punti è immediata) in uno stato del campo  $|\psi\rangle_2$  che sia autostato dell'operatore numero corrispondente all'autovalore 2:

$$\rho_2(x_1, x_2; t) = {}_2\langle \psi^+(x_1, t) \psi(x_1, t) \psi^+(x_2, t) \psi(x_2, t) \rangle_2, \quad (8.3)$$

Ora, essendo i punti  $x_1$  e  $x_2$  distinti, nella (8.3) possiamo portare a sinistra tutti gli operatori "dagati", ottenendo una funzione simmetrica per lo scambio di  $x_1$  e  $x_2$ :

$$\rho_2(x_1, x_2; t) = {}_2\langle \psi^+(x_1, t) \psi^+(x_2, t) \psi(x_2, t) \psi(x_1, t) \rangle_2. \quad (8.4)$$

A questo punto, inserendo l'operatore identità, scritto in termini di completezza di autostati dell'operatore numero  $\sum_{\underline{k}} |\underline{k}\rangle \langle \underline{k}|$ , otteniamo:

$$\rho_2(x_1, x_2; t) = \sum_{\underline{k}} {}_2\langle \psi^+(x_1, t) \psi^+(x_2, t) |\underline{k}\rangle \langle \underline{k}| \psi(x_2, t) \psi(x_1, t) \rangle_2. \quad (8.5)$$

Con l'applicazione delle regole di commutazione tra gli operatori di campo non è difficile mostrare (ma non lo mostreremo in dettaglio perché sufficientemente intuitivo) che gli unici elementi di matrice della (8.5) che sono diversi da zero sono quelli con lo stato di vuoto  $|0\rangle$ . Con alcuni calcoli si ha così:

$$\rho_2(x_1, x_2; t) = 2! |\psi_2(x_1, x_2; t)|^2 \quad (8.6)$$

avendo posto

$$\psi_2(x_1, x_2; t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2!}} \langle 0 | \psi(x_2, t) \psi(x_1, t) | \psi \rangle_2. \quad (8.7)$$

La cosa veramente interessante, adesso, è che con alcuni calcoli che qui non mostreremo, se l'hamiltoniana del campo è, per esempio, la (7.71) la funzione (8.7) soddisfa l'equazione "di Schrödinger":

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(x_1, x_2; t) = \sum_{j=1}^2 -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \psi_2(x_1, x_2; t) + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^2 V(x_j - x_l) \psi_2(x_1, x_2; t). \quad (8.8)$$

La derivazione che abbiamo qui presentato, a nostro avviso, chiarisce abbastanza bene i sottili legami che intercorrono tra la teoria quantistica dei campi e la meccanica quantistica ed è, inoltre, di aiuto nell'interpretazione di quest'ultima (come vedremo fra poche pagine nelle osservazioni sul postulato 1)<sup>i</sup>. La funzione d'onda di Schrödinger per 2 particelle fornisce, tramite la (8.6), la funzione di correlazione a tempi uguali delle misure di densità del campo di Schrödinger effettuate in due punti distinti (a parte la normalizzazione). Nell'interpretazione della meccanica quantistica tale funzione di correlazione diventa la densità di probabilità che effettuando due misure di posizione a tempi uguali, una particella venga trovata in  $x_1$  e l'altra in  $x_2$ .

### ***Un esempio: le autofunzioni della quantità di moto***

Un esempio semplice, e strettamente collegato alla (8.7), si può avere prendendo uno stato a singolo quanto di quantità di moto  $k$  (siamo nel caso monodimensionale):

$$|k\rangle = \mathbf{a}^+(k)|0\rangle \quad (8.9)$$

e considerando l'ampiezza di transizione  $\langle 0 | \psi(x; t) | k \rangle$ , si ha così:

$$\langle 0 | \psi(x; t) | k \rangle = \langle 0 | \int \frac{dk'}{2\pi 2\omega} \mathbf{a}(k') e^{i(k'x - \omega't)} \mathbf{a}^+(k') | 0 \rangle. \quad (8.10)$$

Tenendo conto che  $\langle 0 | \mathbf{a}^+(k') = 0$  e delle relazione di commutazione (7.50) (ricordandoci che qui, però, non abbiamo  $\hbar$ ) si ha:

$$\langle 0 | \psi(x; t) | k \rangle = \langle 0 | \int \frac{dk'}{2\pi 2\omega} [\mathbf{a}^+(k') \mathbf{a}(k') + 2\pi 2\omega \delta(k' - k)] e^{i(k'x - \omega't)} | 0 \rangle = e^{i(kx - \omega t)}. \quad (8.11)$$

Come si vede questa ampiezza di transizione è proprio la usuale autofunzione impropria, tipica della meccanica quantistica, per una particella di quantità di moto  $k^{ii}$ .

### ***Una semplice rilettura di quanto già sappiamo***

Rivediamo ora, in un altro modo (fondamentalmente effettuiamo solo un lieve cambiamento di terminologia), quanto già sappiamo sulla quantizzazione dei modi normali in teoria quantistica dei campi in maniera da introdurre parte della terminologia tipica della meccanica quantistica. La teoria quantistica dei campi introduce gli aspetti statistici tipici della teoria quantistica a partire dai modi normali del campo, ognuno dei quali equivale a livello dinamico unidimensionale che evolve nel tempo secondo la legge:  $a(k, t) = a(k) e^{-i\omega(k)t}$ . Si promuovono poi la variabile dinamica classica  $a(k)$  e la sua complessa coniugata  $a^*(k)$  ad operatori  $\mathbf{a}(k)$  e  $\mathbf{a}^+(k)$  tali che:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = 1 \quad (8.12)$$

Il più semplice sistema dinamico è quello che, nel limite classico, si descrive sulla retta con posizione  $x$  e quantità di moto  $p$ . Se questo punto materiale è soggetto ad una forza armonica  $F = -kx$  esso viene ad essere un oscillatore armonico unidimensionale descrivibile in modo compatto con la variabile complessa

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \left( \sqrt{m\omega} x + i \frac{1}{\sqrt{m\omega}} p \right) \quad (8.13)$$

Essendo  $\xi$  una costante con le dimensioni di una “azione” che rende dimensionale questa variabile e con

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8.14)$$

La teoria diventa quantistica “promuovendo”  $x$  e  $p$  a operatori tali che:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}^+] = 1. \quad (8.15)$$

Con ciò, ponendo  $\xi = \hbar$ , si ha:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar. \quad (8.16)$$

L’hamiltoniana dell’oscillatore armonico:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} m\omega^2 \mathbf{x}^2 + \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 \quad (8.17)$$

diventa:

$$\mathbf{H} = \hbar\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (8.18)$$

A questo punto non stiamo certamente a rifare quanto già scritto nel cap. 7. L’hamiltoniana (8.18) ha come autovalori  $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  che corrispondono agli autovettori  $|n\rangle$  che sono dati dalla successiva applicazione dell’operatore di creazione allo stato dell’oscillatore armonico di minima energia,  $|0\rangle$ , (che supporremo normalizzato, ovvero di norma unitaria). Cioè, in formule (tenendo conto della condizione di normalizzazione per ciascun autovettore):

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\mathbf{a}^+)^n |0\rangle \quad (8.19)$$

Dal punto di vista algebrico, quindi, nulla di nuovo, ciò che a questo punto è differente è l’interpretazione dei risultati trovati. Come abbiamo già detto poco sopra  $|0\rangle$  non rappresenta più lo stato di vuoto del campo ma semplicemente lo stato di energia minima dell’oscillatore

che, a differenza del caso classico, ora non è più nulla ma vale  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  mentre  $|n\rangle$  rappresenta l' $n$ -esimo stato eccitato. Fino a qui abbiamo lavorato su uno spazio astratto utilizzando soltanto le proprietà algebriche degli operatori. A questo punto, però, conviene osservare che la condizione (8.2) individua (non stiamo a preoccuparci del rigore matematico) come spazio “buono” per ambientare il nostro problema lo spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  delle funzioni a quadrato integrabili. Risulterà quindi d’obbligo concretizzare gli operatori definiti dalle (8.14) come precisi operatori su tale spazio di Hilbert. Una possibile scelta di operatori su  $L^2(\mathbb{R})$  soddisfacenti la condizione (8.14) è data da:

$$\mathbf{x} \equiv x \cdot \quad \mathbf{p} \equiv -i\hbar \frac{d}{dx}. \quad (8.20)$$

La (8.9) rappresenta solo una fra le possibili scelte, fortunatamente, però, un teorema, dovuto a Stone e Von Neuman, ci assicura che, trascurando del tutto il rigore matematico e parlando molto rozzamente, tutte le coppie di operatori soddisfacenti la (8.14) sono isomorfe fra loro. Dalle (8.15) e (8.20) segue allora che l’autofunzione  $\varphi_0$  dello stato fondamentale è determinata dall’equazione:

$$\mathbf{a}|0\rangle = \left( \xi + \frac{d}{d\xi} \right) \varphi_0(\xi) = 0; \quad \xi \equiv \alpha x, \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (8.21)$$

che ha come soluzione normalizzata la funzione:

$$\varphi_0(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}. \quad (8.22)$$

L’autofunzione dello stato  $n$ -esimo è allora data da successive applicazioni dell’operatore di creazione all’autofunzione dello stato fondamentale. Cioè, con ovvia simbologia, si ha:

$$\varphi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi - \frac{d}{d\xi} \right)^n \right] \varphi_0(\xi). \quad (8.23)$$

Finora non abbiamo discusso l’evoluzione temporale dell’oscillatore, per fare questo possiamo sempre riferirci alla descrizione hamiltoniana (cfr. cap. 7) e ottenere quindi le equazioni operatoriali:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -m\omega^2 \mathbf{x} \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} \end{cases} \quad (8.24)$$

(siamo così giunti alla rappresentazione, detta di Heisenberg, nella quale sono gli operatori a evolvere...). Il sistema (8.24) ha come soluzione:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) \cos \omega t + \left[ \frac{\mathbf{p}(0)}{m\omega} \right] \sin \omega t \\ \mathbf{p}(t) = -m \mathbf{x}(0) \sin \omega t + \mathbf{p}(0) \cos \omega t \end{cases} \quad (8.25)$$

Dalle (8.25) si vede subito che gli operatori posizione e quantità di moto oscillano come le grandezze classiche, ma ciò non deve farci pensare ad una analogia troppo stretta col caso classico. Si potrebbe, infatti, anche ritenere che i loro valori medi siano oscillanti ma ciò è, in generale, falso, infatti, per esempio negli autostati prima scritti, il valor medio è sempre nullo (e, in effetti, il valor medio di un'osservabile in uno stato stazionario è sempre costante...). Per ottenere oscillazioni in un qualche modo “simili” alle oscillazioni classiche bisogna considerare sovrapposizioni di autostati dell'energia. Senza fornire alcuna dimostrazione diciamo solo che uno stato coerente, del tipo discusso nel cap. 7, descrive un pacchetto che rimbalza “armonicamente” avanti e indietro e rappresenta quanto di più simile si possa costruire ad un oscillatore classico in meccanica quantistica.

Non staremo qui a insistere sugli aspetti tecnici della meccanica quantistica, diremo solo che supporremo valide le (8.20) in ogni caso, anche nel caso in cui non si abbia a che fare con un oscillatore armonico. Potremo così studiare problemi molto generali: basterà per questo scrivere l'hamiltoniana del sistema in termini degli operatori posizione e quantità di moto (stando un po' attenti ai problemi derivanti dal fatto che questi due operatori non commutano tra loro), da questa ricavare le equazioni del moto da risolversi con la condizione (8.2) perché le soluzioni abbiano significato fisico. Di fatto, ambientando il discorso in  $L^2(\mathbb{R})$  si tratterà di risolvere l'equazione:

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \mathbf{H}\psi. \quad (8.26)$$

Tutto questo si trova in ogni buon testo sull'argomento e noi non ne parleremo oltre. Nelle prossime pagine, invece, daremo i postulati della meccanica quantistica con alcuni commenti; questo perché riteniamo che ciò sia utile per una significativa didattica nella scuola superiore (e forse anche oltre) e perché si possa meglio capire le analogie e le differenze tra la meccanica quantistica, la teoria quantistica dei campi e le fisica classica.

### Postulati della meccanica quantistica

1. Ad ogni sistema fisico è associato un opportuno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Lo stato di tale sistema fisico è descritto da un vettore  $\psi$  di  $\mathcal{H}$  di norma unitaria. La preparazione del sistema al tempo  $t=0$  equivale a determinare il vettore di stato al tempo iniziale ( $t=0$ ).  
Se due sistemi fisici 1 e 2, con spazi di Hilbert  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  vengono combinati in un unico sistema (per esempio facendoli interagire in qualche modo), lo spazio di Hilbert del sistema composto è dato dal prodotto tensoriale di  $\mathcal{H}_1$  per  $\mathcal{H}_2$ .
2. Ad ogni osservabile fisica  $A$  è associato un operatore autoaggiunto<sup>iii</sup>  $\mathbf{A}$ . Lo spettro di  $\mathbf{A}$  costituisce l'insieme dei possibili valori di una misura della grandezza  $A$ .

3. Se  $a_r$  appartiene allo spettro discreto di  $\mathbf{A}$  e  $\varphi_{ru}$  è l'insieme dei corrispondenti autovettori normalizzati (dove  $u$  è un indice di degenerazione) allora la probabilità che al tempo  $t$  una misura di  $A$  fornisca il risultato  $a_r$  è data da

$$P(A = a_r, \psi) = \sum_u |\langle \varphi_{ru} | \psi \rangle|^2. \quad (8.27)$$

Se invece  $\alpha$  appartiene allo spettro continuo di  $\mathbf{A}$  e  $\varphi_{\alpha u}$  è l'insieme dei corrispondenti autovettori impropri ( $u$  è anche qui un indice di degenerazione) allora la probabilità che al tempo  $t$  una misura di  $A$  fornisca un risultato tra  $\alpha$  e  $\alpha + d\alpha$  è:

$$P(\alpha < A < \alpha + d\alpha, \psi) = \sum_u |\langle \varphi_{\alpha u} | \psi \rangle|^2 d\alpha. \quad (8.28)$$

4. L'evoluzione temporale di  $\psi$  è regolata dall'equazione:

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \mathbf{H}\psi \quad (8.29)$$

dove  $\mathbf{H}$  è un opportuno operatore autoaggiunto.

5. Lo stato del sistema fisico, rappresentato prima della misura da  $\psi(t)$ , è, subito dopo la misura che ha fornito il valore  $a_r$  per la grandezza  $A$ , dato da  $\frac{\mathbf{P}_{a_r} \psi(t)}{\|\mathbf{P}_{a_r} \psi(t)\|}$  dove

$$\mathbf{P}_{a_r} = \sum_u |\varphi_{r_u} \rangle \langle \varphi_{r_u}| \quad (8.30)$$

è il proiettore sull'autospazio generato dagli autovettori corrispondenti ad  $a_r$ .

Abbiamo qui utilizzato la cosiddetta notazione di Dirac. In tale notazione “il simbolo  $\langle f | g \rangle$ , adottato per indicare il prodotto scalare tra due generici elementi dello spazio di Hilbert, viene materialmente spezzato in due parti  $\langle f |$  e  $| g \rangle$  che, dalla parola inglese *bracket* (parentesi), vengono designate rispettivamente come “bra” e come “ket”. Il ket  $| g \rangle$  viene semplicemente usato in luogo di  $g$  per indicare un elemento dello spazio di Hilbert, il bra  $\langle f |$  viene usato per indicare l'operazione di prodotto scalare per l'elemento  $f \dots$ ”<sup>iv</sup>.

### Osservazioni sui postulati

#### Postulato 1

Mentre in fisica classica ad un sistema fisico è associato un opportuno spazio delle fasi e lo stato di un sistema è descritto da un punto in tale spazio, in meccanica quantistica ad ogni sistema fisico è associato uno spazio di Hilbert e lo stato del sistema è descritto da un vettore in tale spazio. In meccanica classica lo spazio delle fasi dipende dai gradi di libertà del sistema; analogamente in meccanica quantistica il tipo di sistema studiato individua il

particolare spazio di Hilbert. Per esempio, ad una particella puntiforme classica si associa lo spazio delle fasi caratterizzato da  $(\underline{x}, \underline{p})$  mentre ad una particella quantistica si associa tipicamente lo spazio di Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Tralasciando alcuni “dettagli”, uno spazio di Hilbert è uno spazio lineare complesso, dotato di prodotto scalare, completo (cioè tutte le successioni che sono di Cauchy secondo la norma indotta dal prodotto scalare sono convergenti). Una volta scelto lo spazio di Hilbert in cui ambientare il sistema, ogni vettore di tale spazio (con alcune eccezioni dette regole di super selezione di cui ci occuperemo fra poco) rappresenta un possibile stato del sistema. Il fatto che lo spazio di Hilbert sia lineare implica che se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono due possibili stati del sistema, allora anche  $\psi = \psi_1 + \psi_2$  ne rappresenta un possibile stato. Spesso a questo fatto ci si riferisce col nome di Principio di Sovrapposizione. In alcuni testi di meccanica quantistica si preferisce associare allo stato di un sistema fisico un raggio (cioè un sottospazio unidimensionale) piuttosto che un vettore normalizzato. Questo significa che se  $\psi$  rappresenta lo stato del sistema in esame anche  $a\psi$ , dove  $a$  è una generica costante (anche non di modulo 1) rappresenta lo stesso stato.

Questa associazione è un po’ imprecisa. Supponiamo, infatti, di pensare allo stato come rappresentato da uno specifico vettore normalizzato, allora, grazie alla linearità degli spazi di Hilbert e dell’equazione di Schrödinger, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono due possibili stati del nostro sistema allora anche una loro generica combinazione lineare normalizzata

$$\psi_{12} = a\psi_1 + b\psi_2 \quad (8.31)$$

rappresenta uno stato possibile del sistema che, evidentemente, dipende dai valori delle costanti  $a$  e  $b$ . Se, invece, pensiamo lo stato come rappresentato da un raggio, allora sia  $\psi_1$  che  $a\psi_1$  rappresentano lo stesso stato, questo indipendentemente dal valore di  $a$ . Ne segue che, con questa seconda interpretazione lo stato rappresentato dalla (8.20) dovrebbe essere indipendente dai valori di  $a$  e  $b$ , contrariamente a tutto quello che si osserva negli esperimenti di interferenza, per esempio quello della doppia fenditura. Insomma, lo stato di un sistema deve essere specificato non “da solo”, ma anche in relazione con gli altri possibili stati del sistema, cioè deve essere specificato come vettore e non solo come raggio.

Per come siamo giunti dalla teoria di campo classico “con quantizzazione” all’interpretazione di Born risulta chiaro che la  $\psi$  non descrive le proprietà del quanto (della particella) in un singolo esperimento, ma è riferita alla collezione statistica totale che si ottiene ripetendo con le stesse modalità un grande numero di volte il processo in esame. Per comprendere il significato della teoria è importante riferirsi alla situazione in cui si considerano molte ripetizioni di un singolo processo sperimentale concernente una particella per volta. La  $\psi$  è riferita a tutte queste ripetizioni cioè come si dice, è riferita all’ensemble statistico. Dal punto di vista sperimentale, nel caso in cui si studi un fascio non autointeragente, la ripetizione  $N$  volte di un singolo atto sperimentale è equivalente a considerare un fascio di  $N$  particelle non correlate. In questo caso, in un certo senso,  $\psi$  finisce per essere associata al fascio. Stiamo però attenti che, seppure identificabili nella pratica, le due situazioni, quella di considerare un ensemble statistico e quella di considerare un singolo fascio “di”  $N$  particelle non autointeragenti, sono concettualmente differenti. Infatti la prima è, in meccanica quantistica, tecnicamente descritta dalla  $\psi(\underline{x}; t)$ , mentre la seconda è descritta, da  $\psi(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N; t)$ . Dal punto di vista matematico quest’ultima funzione vive nello spazio delle configurazioni ed è una funzione non più con dominio in  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  ma in  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}$ .

La meccanica quantistica pone al centro della sua descrizione quella del quanto e, quindi, la sua tipica terminologia è quella di parlare di un sistema composto da 1, 2, ...,  $N$  particelle,

descritto dalla funzione d'onda  $\psi(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N; t)$ . E' importante però sottolineare che sarebbe meglio dire che la  $\psi(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N; t)$ , più che descrivere un insieme di  $N$  particelle, descrive le correlazioni tra  $N$  ipotetici rivelatori posti in  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N$  al tempo  $t$ . Emerge qui chiaramente il fatto che il tempo in meccanica quantistica rappresenta un parametro:  $\psi(t=0)$  rappresenta lo stato che abbiamo preparato al tempo  $t=0$ , mentre  $\psi(t)$  rappresenta l'evoluto di tale stato iniziale quando è passato un tempo  $t$ .

### Postulati 2 e 3

Una volta fissato lo stato  $\psi$  di un sistema questi postulati ci spiegano come estrarne informazioni. Vediamo come fare. Supponiamo di volere avere informazioni sulla grandezza fisica  $A$ .

- Dobbiamo trovare un modo per associare ad  $A$  un operatore autoaggiunto.
- Poi dobbiamo ricavare i suoi autovalori (si dimostra che questi sono sempre reali) e determinare i corrispondenti autovettori normalizzati, i quali formano una base (o meglio un "s.o.n.c.") nello spazio di Hilbert.
- Dobbiamo rappresentare, quindi, la  $\psi$  su questa base.
- Allora i possibili valori di una misura di  $A$  sono tutti e solo gli autovalori trovati, e la probabilità di ottenere un certo fissato valore è dato dal quadrato della norma della proiezione di  $\psi$  sull'autovettore corrispondente all'autovalore considerato (o, nel caso in cui gli autovettori fossero più di uno sul sottospazio da loro generato).

Il motivo per certi aspetti "fisico" per cui è necessario rappresentare un'osservabile con un operatore autoaggiunto è che gli operatori autoaggiunti hanno un s.o.n.c. di autofunzioni sul quale è possibile sviluppare lo stato del sistema in esame. In un certo senso scegliere un operatore autoaggiunto equivale a scegliere un s.o.n.c. nello spazio di Hilbert. Il modulo quadro del coefficiente dello sviluppo relativo all'autovettore corrispondente all'autovalore  $a$ , fornisce la probabilità di ottenere proprio il valore  $a$  in una misura della grandezza in esame. Tale operazione sarebbe impossibile se all'operatore considerato non fosse associato un s.o.n.c..

E' importante osservare che ad ogni autovalore non corrisponde, in generale, un unico autovettore normalizzato, come si dice tecnicamente si ha degenerazione. Questo fatto ha importanti conseguenze fisiche perché solo in caso di degenerazione è possibile trovare un altro operatore autoaggiunto che commuti col primo e non sia funzione di questo.

Se ci troviamo in questa situazione, cioè se due operatori **A** e **B** commutano, allora si può dimostrare che essi hanno una base di autovettori in comune; in tal caso le osservabili fisiche corrispondenti si diranno, per ovvie ragioni, compatibili. Anche con due operatori, in generale, ci sarà degenerazione degli autovettori ma si capisce che la degenerazione sarà, per così dire, diminuita. All'aumentare del numero di operatori commutanti si arriverà finalmente al caso in cui ad ogni insieme di autovalori dei vari operatori corrisponderà un unico autovettore comune; gli operatori avranno, così, un unico s.o.n.c. in comune. Si parlerà, in tal caso di insieme completo di operatori. L'osservazione compiuta su un insieme completo di osservabili compatibili si dirà osservazione massima, per ovvi motivi....

Le misure sperimentali, però, spesso non sono di questo tipo. Ad esempio dalla traccia di una particella in camera a bolle si ricavano (in maniera imprecisa) simultaneamente la sua posizione e la sua quantità di moto. Gli operatori descriventi tali misure "a grana grossa" necessitano una descrizione che è possibile solo in una versione della meccanica quantistica più "raffinata" di quella generalmente presentata nei manuali.

Come sempre, anche nel caso di un sistema di operatori **A**, **B**,... commutanti tra loro, il quadrato della norma della proiezione di  $\psi$  su un certo autovettore fornirà la probabilità di misurare, per la grandezza  $A$ , il valore dell'autovalore di **A** corrispondente all'autovettore su

cui si proietta; oppure fornirà la probabilità di misurare per la grandezza  $B$  l'autovalore di  $\mathbf{B}$  corrispondente a quello stesso autovettore. Si capisce così perché è possibile avere informazioni simultanee solo per osservabili corrispondenti ad autovettori commutanti tra loro.

Un qualsiasi operatore che commuti con un sistema completo di operatori è funzione di tali operatori. Questo significa che la misurazione di una qualsiasi grandezza fisica, compatibile con altre grandezze già compatibili fra loro e che formano una osservazione massima, è inutile; nel senso che il suo valore si può ricavare dalla conoscenza di tali valori e non aggiunge informazioni sul sistema. Un esempio di insieme completo di osservabili compatibili per la particella singola è dato da:  $\mathbf{H}$  (l'hamiltoniano, cioè l'energia totale),  $\mathbf{M}^2$  (quadrato del momento angolare),  $\mathbf{M}_z$  (componente  $z$  del momento angolare).

Una misura di un insieme completo di osservabili compatibili a spettro discreto determina univocamente lo stato del sistema.

Se due osservabili non commutano fra loro, allora, in generale non sarà possibile chiedersi quale sarà la probabilità che misure congiunte della prima e della seconda forniscano certi risultati, perché non sarà possibile sviluppare il vettore di stato su una base comune alle due osservabili.

E' interessante notare che la massa e il momento magnetico non sono osservabili in meccanica quantistica ma entrano nella definizione dell'hamiltoniana. La carica elettrica gioca un ruolo ancora differente, infatti è possibile introdurre un operatore di carica; però combinazioni lineari di stati con carica differente non rappresentano più uno stato lecito e così, nello studio del sistema, ci si deve sempre limitare a sottospazi dello spazio di Hilbert corrispondenti ad un preciso autovalore della carica elettrica. Questo è un esempio del fatto che il principio di sovrapposizione lineare non è applicabile incondizionatamente. Per lo meno nel senso che non c'è evidenza fisica della possibilità di preparare stati puri combinando vettori di stato con diversi autovalori della carica elettrica. Le restrizioni al principio di sovrapposizione lineare si chiamano regole di superselezione.

Se non vogliamo parlare di regole di superselezione possiamo pensare che, in pratica, anche la carica elettrica entri nella definizione dell'hamiltoniana.

In un certo senso questo ci fa capire meglio come la meccanica quantistica sia una teoria concettualmente riferita proprio ai quanti e non, più genericamente, a piccolissime particelle. Infatti, ad esempio, se stiamo studiando un elettrone è ben evidente che la sua carica vale esattamente sempre solo  $e$ , e la sua massa vale sempre solo  $m_e$ . Non ci sono altre possibilità. Se, invece, immaginiamo la particella come qualcosa su cui possa essere depositata una carica a piacere... beh allora la regola di superselezione della carica diventa davvero incomprensibile perché non si capisce perché la particella, che può essere in uno stato di carica  $q_1$  e in un altro stato di carica  $q_2$ , non possa (come invece accadrebbe per le altre osservabili) essere anche in uno stato di sovrapposizione dei due precedenti.

Il tempo, dal canto suo, è un parametro e non un'osservabile. Infatti si può dimostrare che se esistesse un operatore "tempo", questo implicherebbe per il sistema stati di energia negativa non limitati verso il basso, per esempio l'energia cinetica di un elettrone libero potrebbe assumere valori negativi, e questo è assurdo.

Anche nella scelta dello spazio di Hilbert la variabile tempo non gioca alcun ruolo. Per esempio il tipico spazio di Hilbert associato ad una particella priva di spin è  $L^2(\mathbb{R}^3)$  e non  $L^2(\mathbb{R}^4)$ , proprio perché dobbiamo tenere in considerazione solo le variabili spaziali.

Osserviamo infine che, se è vero che ad ogni osservabile del sistema è associato un opportuno operatore autoaggiunto, non vale però, in generale, il viceversa; cioè non ad ogni operatore autoaggiunto corrisponde concretamente un'osservabile del sistema.

Molti degli operatori che rappresentano osservabili hanno spettri, almeno in parte, continui. Di questo tipo sono ad esempio gli operatori posizione e quantità di moto. “Autostati” corrispondenti a punti dello spettro continuo non sono normalizzabili e quindi non appartengono allo spazio di Hilbert del sistema. Per loro si usa il termine di autofunzioni improprie e per queste ci vuole una trattazione un po’ più raffinata. Si ha comunque che (con la simbologia del postulato 3):

$$\int d\alpha \varphi_{au} \in \mathcal{H}. \quad (8.32)$$

Per esempio (senza troppo rigore matematico) le autofunzioni dell’operatore quantità di moto (per semplicità consideriamo qui il caso monodimensionale):

$$\mathbf{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (8.33)$$

sono date da:

$$\varphi_\alpha = A e^{i\alpha x} \quad (8.34)$$

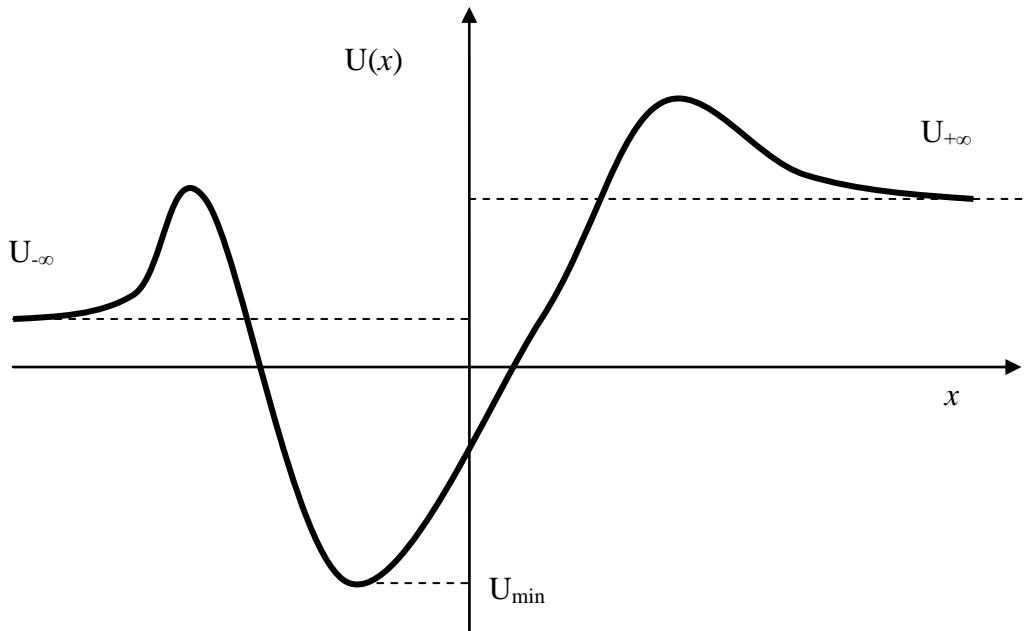
che non appartengono a  $L^2(R)$  in quanto l’integrale esteso ad  $R$  di  $\varphi_{au} \varphi_{au}^*$  è infinito. Però

$$\int_{-T}^T d\alpha A e^{i\alpha x} = \text{fattore oscillante} \cdot \frac{\sin Tx}{x} \in L^2(R). \quad (8.24)$$

Come si vede, quello che abbiamo così rappresentato, è una sorta di pacchetto d’onde scritto come integrale di Fourier di onde piane.

La trattazione tramite autofunzioni improprie è molto importante in meccanica quantistica, così come è notevole la distinzione, per nulla solamente formale, tra autofunzioni proprie e improprie e, a nostro avviso, è importante anche dal punto di vista didattico poterne apprezzare i collegamenti con la “realtà” fisica. Potremmo vedere in quanto stiamo dicendo un esempio della necessità di tenere conto degli aspetti formali nella comprensione delle spiegazioni fisiche.

Per capire il significato fisico delle autofunzioni proprie e improprie consideriamo un esempio abbastanza generale: studiamo lo spettro dell’hamiltoniana (l’energia) per una particella sottoposta al potenziale monodimensionale di Fig. 8.1.



**Fig. 8.1** Una particella è sottoposta all'energia potenziale  $U(x)$ .

Si può allora dimostrare che lo spettro dell'operatore hamiltoniano è:

- discreto tra  $U_{\min}$  e  $U_{-\infty}$
- continuo e non degenere tra  $U_{-\infty}$  e  $U_{+\infty}$
- continuo e doppiamente degenere sopra  $U_{+\infty}$ .

Ciò significa che tra  $U_{\min}$  e  $U_{-\infty}$  si avranno autofunzioni proprie, cioè elementi di  $L^2(\mathbb{R})$ , insomma funzioni che si devono annullare abbastanza rapidamente all'infinito e rappresentano quindi, detto molto rozzamente, una particella che non si allontana troppo dall'origine: abbiamo, cioè, stati legati.

Tra  $U_{-\infty}$  e  $U_{+\infty}$ , invece lo spettro è continuo, quindi le autofunzioni sono improprie e solo un pacchetto di tali autofunzioni del tipo (8.32) rappresenta un possibile stato della particella: si ha fondamentalmente una particella libera che si muove verso sinistra, nella direzione delle  $x$  negative (infatti lo spettro è non degenere).

Per valori dell'energia maggiori di  $U_{+\infty}$  abbiamo una situazione analoga a quella appena descritta ma con doppia degenerazione: ora per ogni intervallino di energie si ha un pacchetto d'onde che rappresenta una particella, fondamentalmente libera, che si muove verso destra oppure verso sinistra.

Quanto abbiamo visto qui è del tutto generale: lo spettro discreto dell'hamiltoniana corrisponde a stati legati, quello continuo a stati “liberi” del sistema.

Sempre a proposito del concetto di stato, osserviamo che in meccanica classica non c'è alcuna distinzione fondamentale tra stati e osservabili, nel senso che tutte le osservabili si possono scrivere in termini di posizione e quantità di moto, che sono, appunto, le grandezze che rappresentano lo stato del sistema. In meccanica quantistica, invece, stati e osservabili non sono più legati in questa maniera e non sono più, per così dire, in corrispondenza uno a uno.

E' importante sottolineare che non sempre la preparazione di un sistema consente di specificarne lo stato in modo completo anzi, per certi aspetti, questa impossibilità è la situazione più comune: il caso tipico in cui si ha a che fare con una miscela statistica. Utilizzando una terminologia tipica da meccanica quantistica, l'informazione sul sistema potrebbe essere ad esempio del tipo: il sistema è formato da  $n$  elettroni di energia  $E$  e da altri  $n$  elettroni di energia  $2E$ . Più in generale, per esempio, se sappiamo che il sistema si trova in

un uno degli stati  $\psi_1$  con probabilità  $p_1$ ,  $\psi_2$  con probabilità  $p_2$ ,  $\psi_n$  con probabilità  $p_n$ ; allora, (non forniremo qui alcuna dimostrazione di quanto stiamo dicendo) la situazione è ancora ben descrivibile in termini di meccanica quantistica pur di associare a questo stato “miscola” un operatore, detto operatore statistico, così definito:

$$\mathbf{p} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (8.36)$$

Per l'operatore statistico vale un'equazione di evoluzione, corrispondente all'equazione di Schrödinger, che qui riportiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{p}]. \quad (8.37)$$

#### Postulati 4 e 5

Osserviamo ancora che, per sua stessa natura, un esperimento di fisica deve essere riproducibile e che la teoria che lo spiega è riferita a questa riproducibilità: si capisce così che solo la funzione d'onda pensata come riferita ad un *ensemble* statistico è un “oggetto” “ragionevole” della teoria ed è suscettibile di verifiche sperimentali. Non lo è, invece, se pensata come riferita ad un singolo atto elementare, alla rivelazione di un solo quanto.

La procedura consistente nell'effettuare una misura al tempo  $t$  va, così, interpretata come una procedura atta ad una nuova preparazione del sistema; e cioè quella ottenuta selezionando la sottocollezione statistica che, sottoposta alla misura, ha fornito un certo valore della grandezza o delle grandezze misurate (oppure un risultato appartenente ad un certo intervallo, nel caso si tratti di osservabili a spettro continuo). Se si vuole che questa sottocollezione rappresenti lo stato del sistema preparato con quella particolare proprietà è ovvio che c'è bisogno di una nuova normalizzazione.

Dal punto di vista della teoria, questo postulato, detto di precipitazione dello stato, è uno dei punti più oscuri perché impone di considerare il mondo “diviso” in due: da un lato il sistema quantistico microscopico e dall'altro l'apparato di misura; apparato che per sua natura risponde in un modo ben preciso ed è, in un certo senso, macroscopico.

Si hanno così due principi di evoluzione: uno regolato dall'equazione di Schrödinger, che è deterministico, lineare e reversibile; l'altro, rappresentato dal postulato di precipitazione dello stato, che è stocastico, non lineare e irreversibile.

Per capire dove si nasconde il problema quando si considerano due diversi principi di evoluzione, supponiamo, come è ovvio se la meccanica quantistica si pone come teoria fondamentale, che anche l'apparato di misura, diciamo dell'osservabile  $M$ , possa essere descritto in termini quantistici. Supponiamo che esso sia nello stato  $M_0$  prima della misura. Supponiamo anche che il nostro sistema quantistico sia nell'autostato  $|m_k\rangle$  relativo all'autovalore  $k$  dell'osservabile  $M$ . Allora lo stato complessivo del sistema quantistico e dell'apparato di misura, prima della misura, sarà dato da  $|m_k\rangle|M_0\rangle$  (vedi il postulato 1 per quanto riguarda il sistema composto). Subito dopo la misura (l'apparecchio avrà dato il risultato  $k$  per la misura effettuata), il sistema totale sarà, con ovvia simbologia, nello stato  $|m_k\rangle|M_k\rangle$ . Ma allora, per la linearità della teoria se  $a$  e  $b$  sono due coefficienti qualsiasi, accadrà che un altro stato del sistema, per esempio lo stato

$$(a|m_k\rangle + b|m_j\rangle)/M_0\rangle \quad (8.38)$$

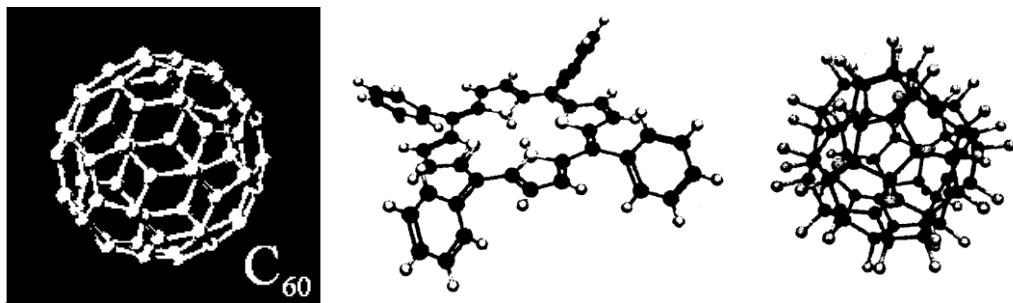
evolverà per effetto della misura nello stato

$$a|m_k\rangle|M_k\rangle+b|m_j\rangle|M_j\rangle. \quad (8.39)$$

La cosa notevole è che questo stato non è in alcun modo fattorizzabile in una parte relativa al solo sistema in esame e in un'altra relativa al solo apparato di misura e ciò significa che l'apparecchio di misura, se si vuole considerarlo come separato dal sistema in esame, non sarà in uno stato definito, contrariamente a quanto si suppone perché esso possa funzionare appunto come apparato di misura e si possa leggere un qualche risultato sullo strumento. Da queste considerazioni, tra l'altro, appare come, stando così le cose, non si riesca a capire come possa avvenire la cosiddetta precipitazione dello stato del sistema quantistico. Anche nell'interpretazione, per certi aspetti un po' sbrigativa, in cui non si attribuisce alcun significato fisico oggettivo alla funzione d'onda, che viene considerata un mero strumento matematico per formulare previsioni statistiche, quanto detto qui sopra rimane evidentemente una difficoltà.

Ci si può domandare allora se c'è, per così dire, un parametro di macroscopicità che permetta di stabilire quando un sistema smetta di obbedire alle leggi della meccanica quantistica, ma tale parametro nella teoria non c'è e, d'altra parte non è neppure ragionevole che ci sia, perché sappiamo che ci sono anche alcuni sistemi macroscopici, per esempio i superconduttori, il cui comportamento può essere spiegato solo per mezzo della meccanica quantistica.

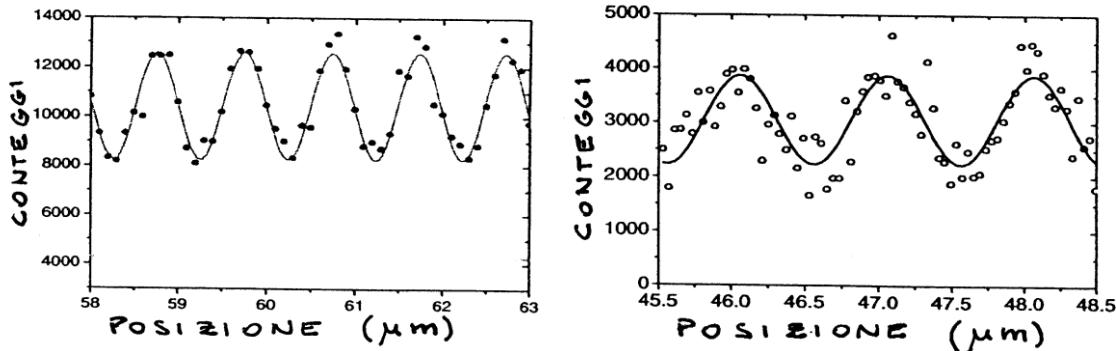
Attualmente alcuni esperimenti nell'ambito dell'ottica materiale si stanno muovendo proprio nella direzione di esplorare i limiti a cui si può osservare il comportamento quantistico di sostanze materiali poste in opportune condizioni; e per capire quale possa essere il ruolo della struttura interna della sostanza utilizzata o delle sue eventuali simmetrie. Per esempio il gruppo di Anton Zeilinger dell'università di Vienna ha effettuato esperimenti di interferenza con una molecola organica, chiamata tetrafenilporfirina (TPP), che è il cuore di molte biomolecole complesse come la clorofilla o l'emoglobina<sup>v</sup>. Sappiamo che il fluorofullerene, di formula chimica  $C_{60}F_{48}$ , è (almeno fino al 2003) la molecola chimicamente più grossa che abbia mostrato un comportamento ondulatorio, quando messa in condizioni opportune.



**Fig. 8.2** Struttura delle molecole di fullerene  $C_{60}$ , di tetrafenilporfirina  $C_{44}H_{30}N_4$  e fluorofullerene  $C_{60}H_{48}$ .

In entrambi casi il pennello materiale utilizzato per gli esperimenti di interferenza viene creato sublimando le sostanze in un forno alla temperatura di circa 560K. Lo schema sperimentale non si discosta da quelli che abbiamo precedentemente presentato nel caso dell'interferenza di fullerene. L'interferometro è costituito da tre reticolati in oro identici tra loro: il primo reticolo prepara il fascio con una coerenza trasversale, il secondo reticolo è responsabile della diffrazione del fascio da cui nasce l'interferenza, mentre il terzo reticolo è in pratica una parte del sistema di rivelazione e serve per dare un'elevata risoluzione spaziale.

Mentre la struttura del fullerene è estremamente simmetrica, quella della tetrafenilporfirina non lo è affatto, avendo piuttosto una struttura appiattita (Fig. 8.2); gli esperimenti realizzati con pennelli di TPP hanno mostrato la totale indipendenza della struttura asimmetrica di tale molecola una volta che sia costituito il pennello: in Fig. 8.3 è possibile vedere sovrapposta la figura di interferenza ottenuta sperimentalmente (a punti) con la previsione teorica che otteniamo senza tenere conto della struttura chimica spaziale di partenza della molecola.



**Fig. 8.3** Frange di interferenza, rispettivamente, di tetrafenilporfirina e di fluorofullerene.

Tratto da L. Hackermüller et al. Phys. Rev Lett. **91**, 9, (29 August 2003).

### Alcune considerazioni sul carattere complesso del campo di Schrödinger

L'uso dei numeri complessi per descrivere fenomeni fisici rappresenta spesso una comodità. Nel caso del campo di Schrödinger, invece, le cose stanno diversamente: esso è, per così dire, intrinsecamente complesso. Vediamone alcune conseguenze.

1. Il fatto che le onde di Schrödinger siano complesse spiega perché esse siano più difficili da evidenziare delle onde elastiche o delle onde elettromagnetiche, e forse anche del perché esse siano state scoperte per ultime. Infatti le onde nell'acqua sono chiaramente visibili, basta guardare la superficie del mare o dello stagno in cui si propagano. Le onde elettromagnetiche non si vedono direttamente ma per rivelare un'onda elettromagnetica piana basta disporre di un'antenna: la corrente oscillante che si genera all'interno dell'antenna mostrerà la presenza dell'onda elettromagnetica. Supponiamo, per fissare le idee, che il campo elettrico in un punto dell'antenna, sia dato dall'espressione  $E = E_0 \cos \omega t$ , allora l'intensità della perturbazione elettromagnetica sarà data, grosso modo, dal quadrato del campo elettrico e oscillatorà nel tempo come  $\cos^2 \omega t$ , così che un'onda piana elettromagnetica ha un'intensità oscillante, variabile periodicamente nel tempo.

Per le onde "materiali" le cose sono un po' più complesse (scusate il gioco di parole). Infatti consideriamo un'onda piana "materiale", essa è descritta da espressioni complesse del tipo  $e^{i(kx-\omega t)}$ ; espressioni il cui modulo quadro è costante nel tempo e vale 1! Così che quando su un rivelatore arriva un pennello materiale descritto da un'onda piana non ci possiamo accorgere di alcun "tipo di oscillazione" della sua intensità: osserviamo solo un accumulo costante di materiale sul rivelatore, senza periodicità. Ecco perché, per mostrare l'aspetto ondulatorio dei pennelli materiali, è così importante effettuare esperimenti di interferenza! Infatti la figura di interferenza formata dalla parte reale e dalla parte immaginaria dell'onda piana è sempre la stessa, anche se le due parti sono sfasate di  $\pi/2$ . Così che il *pattern* di interferenza è "uguale" sia che sia stato prodotto da onde materiali, sia da onde elettromagnetiche, sia da onde

elastiche. Facciamo queste osservazioni in questo capitolo soltanto perché stiamo qui discutendo di alcune questioni matematiche relative alla struttura dell'equazione di propagazione, tuttavia dobbiamo osservare che esse sono riferite alla propagazione dell'onda materiale o elettromagnetica (o addirittura elastica) anche non quantizzata. Siamo arrivati, così, alla conclusione che uno dei motivi per cui è più difficile evidenziare le onde materiali delle onde elastiche o delle onde elettromagnetiche è perché esse sono espresse da espressioni complesse e che pertanto per metterle in evidenza, è necessario effettuare esperimenti di interferenza. Questo è probabilmente una altro motivo per il quale sono state scoperte così "tardi"<sup>vi</sup>.

2. L'equazione di Schrödinger è lineare; il che implica una certa similitudine di comportamento tra i quanti materiali descritti da tale equazione, per esempio gli elettroni non interagenti, e i quanti del campo elettromagnetico, i fotoni. Però ci sono alcune differenze.

Supponiamo di avere nel vuoto un pacchetto di onde elettromagnetiche centrato attorno al numero d'onda  $k_0$ . Allora ricordando, con ovvia simbologia, che

$$c = \lambda v; \quad \omega = ck \quad (8.40)$$

si ha:

$$v_{fase} \equiv \frac{\omega}{k} = c; \quad v_{gruppo} \equiv \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = c. \quad (8.41)$$

Cioè le due velocità, di fase e di gruppo sono uguali, il che significa che il pacchetto si propaga indeformato.

Nel caso di un pacchetto d'onde del campo di Schrödinger, invece, le relazioni di dispersione sono differenti. Infatti da

$$hv = \frac{p^2}{2m} \quad (8.42)$$

si ricava:

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2. \quad (8.43)$$

Perciò si ha:

$$v_{fase} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2} \frac{\hbar k}{m}; \quad v_{gruppo} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = \frac{\hbar k}{m}. \quad (8.44)$$

Come si vede la velocità di gruppo è il doppio della velocità di fase. Questo implica che il vuoto è un mezzo dispersivo per il campo di Schrödinger. In generale, quindi, il pacchetto d'onde iniziale non si propaga indeformato, come accade, invece, ai pacchetti del campo elettromagnetico, ma si allarga.

Questo comportamento è strettamente connesso al carattere complesso della  $\psi$ , infatti la “ $i$ ” che compare nell’equazione di Schrödinger dipende dal fatto che tale equazione contiene la derivata prima rispetto al tempo e la derivata seconda rispetto alle variabili spaziali e questa è la causa delle relazioni di dispersione (8.43) da cui discende l’allargamento del pacchetto d’onde.

3. L’equazione di diffusione (per esempio di un soluto in un solvente o del calore in un conduttore) è la seguente:

$$\left( \nabla^2 + C \frac{\partial}{\partial t} \right) n(\underline{x}, t) = 0, \quad (8.45)$$

dove  $n(\underline{x}, t)$  rappresenta, tanto per fissare le idee, la densità del soluto e  $C$  è un’opportuna costante. Tale equazione ha una struttura molto simile a quella dell’equazione di Schrödinger ma ne differisce per la mancanza dell’unità immaginaria “ $i$ ”.

Da questo discende che l’equazione di diffusione è irreversibile, nel senso che se  $n(\underline{x}, t)$  ne è soluzione allora, in generale non è vero che anche  $n(\underline{x}, -t)$  ne è soluzione. Grazie alla presenza della “ $i$ ”, invece, se  $\psi(\underline{x}, t)$  è soluzione dell’equazione di Schrödinger allora anche  $\psi(\underline{x}, -t)^*$  ne è soluzione. Visto che tutte le grandezze fisicamente significative contengono prodotti del tipo  $\psi(\underline{x}, t)\psi(\underline{x}, -t)^*$ , ne segue che la fisica descritta dall’equazione di Schrödinger è reversibile, così come lo è quella descritta dalle equazioni della meccanica classica.

4. Come sappiamo, possiamo scrivere l’equazione di Schrödinger nella forma:

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \mathbf{H}\psi \quad (8.46)$$

dove  $\mathbf{H}$  è un opportuno operatore autoaggiunto definito sullo spazio di Hilbert nel quale è ambientata l’equazione. Se considerassimo l’analoga equazione senza la “ $i$ ”:

$$\hbar \frac{d\psi}{dt} = \mathbf{H}\psi \quad (8.47)$$

e  $\mathbf{H}$  fosse un opportuno operatore autoaggiunto “reale” allora avremmo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\psi\|^2 &= \frac{d}{dt} \langle \psi, \psi \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \psi, \psi \right\rangle + \left\langle \psi, \frac{d}{dt} \psi \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\hbar} \langle \mathbf{H}\psi, \psi \rangle + \frac{1}{\hbar} \langle \psi, \mathbf{H}\psi \rangle = 2 \frac{1}{\hbar} \langle \psi, \mathbf{H}\psi \rangle \neq 0 . \end{aligned} \quad (8.48)$$

Cioè se l’equazione di Schrödinger fosse “reale” la norma di  $\psi$  non si conserverebbe e l’interpretazione di Born non starebbe più in piedi.

5. Soluzioni dell'equazione di Schrödinger differenti per un fattore di fase descrivono la stessa fisica, infatti le grandezze fisiche sono ottenute da combinazioni in cui compaiono prodotti del tipo  $\psi\psi^*$ , che rimangono inalterati in tale trasformazione.

### Il principio di indeterminazione

Dal punto di vista della meccanica quantistica, come già detto, gli aspetti ondulatori sono aspetti statistici che emergono dalla ripetizione un numero molto grande di volte di un singolo atto sperimentale. L'elemento essenziale di questa descrizione è la funzione d'onda, che è collegata agli aspetti statistici della teoria e che soddisfa un'equazione delle onde. L'oggetto della descrizione è però il quanto, la particella, insomma. Nel contesto della meccanica quantistica le relazioni di Heisenberg (presentate nel cap. 7) possono essere reinterpretate come riferite ad una singola particella. Spesso, quando si opera in questo modo alle relazioni di Heisenberg si dà il nome di "relazioni di incertezza". In effetti, essendo gli operatori posizione e quantità di moto per una particella libera operatori non commutanti tra loro a spettro puramente continuo è chiaro che una particella non potrà mai essere simultaneamente ben localizzata nello spazio delle posizioni e delle quantità di moto, perciò la sua posizione e la sua quantità di moto sono "incerte". L'espressione quantitativa di questa affermazione è legata ad un teorema che afferma che:

se  $\psi$  è il vettore di stato del sistema in esame, e  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  sono due operatori relativi ad altrettante osservabili si ha:

$$\Delta \mathbf{A} \Delta \mathbf{C} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | \hat{[\mathbf{A}, \mathbf{C}]} | \psi \rangle \right| \quad (8.49)$$

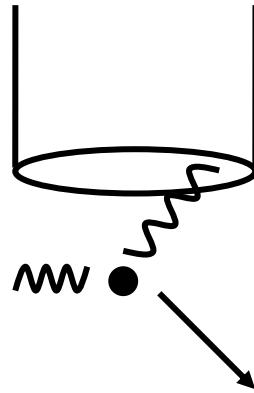
dove  $\Delta \mathbf{A}$  e  $\Delta \mathbf{C}$  rappresentano gli scarti quadratici medi delle due osservabili nello stato  $\psi$ .

Il principio di incertezza per posizione e quantità di moto si ricava allora immediatamente dalla (8.49). Diverso è, invece, il caso delle relazioni che legano tempo ed energia, infatti, come abbiamo già osservato, non esiste l'operatore tempo in meccanica quantistica e, quindi, non si può applicare la (8.49) per ottenere la seconda delle (7.7) che perciò ha uno *status epistemologico* diverso da quello delle relazioni tra posizione e quantità di moto. Si può, però, applicare la (8.47) ad una generica coppia di osservabili per avere relazioni interessanti come, ad esempio, quella tra le tre componenti del momento angolare:

$$\Delta \mathbf{M}_x \Delta \mathbf{M}_y \geq \frac{\hbar}{2} \left| \langle \mathbf{M}_z \rangle \right|. \quad (8.50)$$

Vogliamo notare che, spesso, ci si riferisce alle relazioni di Heisenberg chiamandole "principio di indeterminazione". Noi preferiamo non usare questo nome, innanzi tutto perché non rappresentano un principio nella formulazione assiomatica della meccanica quantistica (anzi ne sono un teorema) e non lo sono neppure della teoria quantistica dei campi e, poi, perché il termine "indeterminazione" può facilmente portare a fraintendimenti. Inoltre, spesso, le predette relazioni vengono introdotte a partire da esperienze di misura semiclassiche, inizialmente proposte dallo stesso Heisenberg: per esempio chiedendosi come determinare la posizione di un elettrone con un microscopio. Nel fare questo si disegna qualcosa di simile a quanto rappresentato in Fig. 8.4; osserviamo che così facendo si dà l'impressione che l'elettrone prima della misura abbia una precisa posizione e una ben fissata quantità di moto e che sia solo l'atto di osservazione che perturba il sistema in maniera in un certo senso imprevedibile. E ciò è per lo meno impreciso perché è impossibile costruire uno stato

dell'elettrone in cui la quantità di moto e la posizione siano fissate in modo preciso, e questo indipendentemente da qualsiasi atto di misurazione.



**Fig. 8.4** Schema dell'esperimento concettuale del “microscopio di Heisenberg”.

Perciò noi riteniamo che questo modo di fare non sia opportuno perché facilmente si finisce per dare l'impressione erronea che le relazioni di Heisenberg siano collegate ad una proprietà del processo di misura e non siano, quindi, una proprietà intrinseca dello stato e delle osservabili.

### Traiettorie e visibilità delle frange in esperimenti di interferenza

Come abbiamo, visto in condizioni per così dire simili, pennelli materiali opportunamente preparati e pennelli elettromagnetici si comportano in maniera molto simile per quanto riguarda la natura ondulatoria della loro propagazione libera. Ciò è mostrato, per esempio, dagli esperimenti di interferenza che abbiamo precedentemente discusso. In questi esperimenti la materia di cui è costituito il pennello non è direttamente visibile e quello che noi facciamo è soltanto rivelare la sua presenza per mezzo di un opportuno strumento, sistemato, per esempio, dopo un reticolo di diffrazione. Sorge allora spontanea una domanda: è possibile notare il comportamento ondulatorio anche per pennelli che, in un qualche senso, possiamo vedere? Per esempio l'acqua che esce da una canna da giardino e che incontra una doppia fenditura di dimensioni opportune, dà interferenza? Lo *spray* colorato di una bomboletta mostra aspetti ondulatori? Se fossimo capaci di fare un esperimento in cui un fascio elettronico viene visualizzato nel suo percorso, darebbe questo ancora interferenza?

E' del tutto evidente che in questi casi la situazione è differente, infatti la condizione di non autointerazione del pennello è paleamente violata: il fatto stesso che parliamo di un liquido fa sì che stiamo considerando un sistema macroscopico con ben precise leggi di autointerazione; e ciò ci pone molto lontani dalla similitudine con un pennello elettromagnetico, pertanto non ci possiamo certamente aspettare un'analogia di comportamento con la luce in un esperimento nel quale un getto d'acqua incontra una doppia fenditura...

Che quando ci sia un po' di autointerazione (basta un briciolo di non linearità nelle equazioni...) la fenomenologia cambi qualitativamente si può capire immediatamente (ma non prendetemi troppo alla lettera, vi diamo solo un'immagine grossolana...) pensando a quanto cambi la descrizione delle onde del mare fra quando c'è bonaccia (le onde si

sovrappongono e interferiscono e diffangono in un porto) e quando c'è tempesta, nel qual caso le onde cozzano l'una con l'altra e il mare è pieno di spruzzi, cosa che ci fa descrivere la situazione come molto più simile a quella dell'urto fra corpi che alla sovrapposizione lineare di onde (o per lo meno è una situazione "intermedia" fra le due).

Possiamo continuare le nostre considerazioni immaginando una situazione molto semplice: immaginiamo un pennellino di un laser che incide su una doppia fenditura. In assenza di polvere la traiettoria del pennello non si vede ma basta un po' di nebbia o di gesso sparso per renderla visibile. Che cosa accade in tale situazione? Accade che parte della luce viene diffusa dal gesso e arriva ai nostri occhi. Evidentemente la luce che arriva a noi non giunge più sulla doppia fenditura e non è certamente quella che dà interferenza. Morale: quanto più è visibile il percorso seguito dal pennello tanto più diminuisce la visibilità delle frange. Nel limite in cui tutta la luce venisse diffusa, le frange sparirebbero, perché non ci sarebbe più luce che arriva sullo schermo.

Pensiamo ora ad un'esperienza simile a questa ma relativa ad un pennello elettronico. Supponiamo di sistemare un cannone elettronico seguito da un biprisma elettronico e da un opportuno rivelatore all'interno di un'ampolla in cui è fatto il vuoto. Come sappiamo dagli esperimenti di Tonomura discussi in precedenza, quello che osserviamo sul rivelatore sono le tipiche frange di interferenza prodotte dalla sovrapposizione di due treni d'onda coerenti. Supponiamo adesso di immettere nell'ampolla un po' di gas, in modo che la sua eccitazione e la conseguente emissione di luce renda visibile il percorso del pennello, un po' come abbiamo fatto per misurare il rapporto tra la densità di carica e la densità di massa, appunto di un fascio elettronico. Che cosa accadrà alla figura di interferenza? Nell'interazione col gas emergeranno aspetti quantistici e la parte del pennello elettronico che ha interagito col gas avrà perso coerenza col resto del pennello. Morale: anche in questo caso, più è visibile il fascio elettronico meno saranno visibili le frange di interferenza. Si capisce allora che nel caso di un getto d'acqua o di una spray, nei quale tutta l'acqua considerata, oppure tutta la vernice, ha un percorso determinato e visibile, non si osserverà alcun fenomeno di interferenza e gli aspetti ondulatori saranno irrimediabilmente perduti. E non dimentichiamoci, inoltre, l'auto interazione dell'acqua con se stessa...

In effetti la richiesta di non autointerazione che avevamo messo come necessaria perché i pennelli materiali mostrassero aspetti ondulatori va ora generalizzata ad una più generale assenza di interazione anche con l'ambiente; pena la cosiddetta decoerenza del pennello e la diminuzione della visibilità delle frange e, in generale della diminuzione della manifestazione degli aspetti ondulatori.

Ancora diverso potrebbe considerarsi il caso di un getto di sabbia lanciato contro due fenditure. Il fatto che la granularità della sabbia sia un fatto essenziale nella definizione di sabbia impedisce certamente che vi sia interferenza, infatti i singoli granellini passeranno sempre soltanto o in una o nell'altra delle due fenditure. Un "pennello di granellini di sabbia" non ha una propagazione ondulatoria essendo piuttosto un flusso di granellini perfettamente localizzati nello spazio e nel tempo: vere e proprie "palline"; e le palline si sa sempre da quale fenditura passano e si conosce punto per punto la loro traiettoria...

Vale la pena rileggere quanto abbiamo detto fin qui dal punto di vista della meccanica quantistica. Immaginiamo per questo di eseguire un esperimento della doppia fenditura a singolo quanto. Supponiamo di fare una misura di posizione, ottenuta per esempio facendo interagire l'elettrone con un atomo che, dissecitandosi, emette luce. Dopo tale misura la funzione d'onda del nostro elettrone (parlando in maniera un po' imprecisa ma, crediamo, efficace) sarà precipitata in un autostato dell'operatore posizione e perderà ogni coerenza con la funzione d'onda dell'elettrone appena prima della misura. La ripetizione di questo esperimento un grande numero di volte non fornirà le ben note frange di interferenza ma solo

due chiazze al di là delle fenditure. Detto in altro modo, se riusciamo a sapere da quale fenditura passa l'elettrone, per esempio mettendo due rivelatori con un'efficienza del 100% subito al di là di ciascuna delle due fenditure, la figura di interferenza scompare, mentre se i rivelatori hanno un'efficienza minore la visibilità della frange diminuisce in maniera calcolabile tramite la meccanica quantistica. Esperimenti di questo tipo sono stati effettuati da Rauch con neutroni e da Zeilinger con fullerene e i risultati sperimentali sono in accordo con i calcoli effettuati in base alla teoria.

Vale forse ancora la pena notare che le tracce lasciate in una camera a nebbia o a bolle mettono in luce un continua interazione del campo col rivelatore e, quindi, la natura particellare salta subito all'occhio e, in tali casi può risultare giustificato il termine di particella relativo al quanto del campo interagente col rivelatore (ma di questo parleremo nel prossimo capitolo).

Dal punto di vista un po' euristico di una teoria dei campi sovrasemplificata, il campo elettronico nell'ampolla interagisce, in vari punti, col campo del gas ivi presente. In questa interazione alcune delle "onde piane" costituenti il pacchetto d'onde del campo elettronico vengono in parte assorbite ed altre, a frequenza più bassa, vengono riemesse. Si ha così una corrispondente perdita di energia del campo elettronico ed una aumento dell'energia del campo elettromagnetico, che noi osserviamo come luce che giunge ai nostri occhi. La riemissione di componenti armoniche del campo elettronico con frequenza più bassa avviene però in maniera incoerente ed proprio per questo che si ha una diminuzione della visibilità delle frange. Ricordiamo per esempio, a tal proposito, che non è possibile vedere alcuna figura di interferenza sovrapponendo luce proveniente da due sorgenti incoerenti, per esempio due lampadine uguali. E', invece, a tal fine, necessario impiegare particolari accorgimenti, utilizzando per esempio un biprisma o degli specchi (per esempio gli specchi di Fresnel).

In questo contesto si parla talvolta di principio di complementarietà tra aspetti particellari e aspetti ondulatori. Senza entrare in raffinate discussioni, in prima approssimazione, sembra comunque un modo un po' fuorviante di esprimersi. Infatti l'interazione è sempre descritta in termini corpuscolari mentre la propagazione libera è sempre in termini ondulatori. L'osservazione di frange di interferenza che rivela la natura ondulatoria della propagazione, però, è un processo di natura statistica nel senso che la rivelazione di un singolo elettrone, per esempio, non dà certo luogo a frange. C'è bisogno di ripetere l'esperimento un numero molto grande di volte perché le impressioni locali si addensino nelle predette frange di interferenza. Però se si avesse un rivelatore in grado di distinguere i singoli elettroni, anche nel caso di un fascio di elevate intensità ci si accorgerebbe sempre della natura quantistica dell'interazione. E' certamente evidente che è molto più facile mettere in evidenza tale natura quantistica in esperimenti a singolo quanto. Spesso, a tale proposito, si parla di natura corpuscolare della materia e della radiazione, teniamo però ben presente che questo è solo un modo compatto per dire che le interazioni sono eventi nello spazio-tempo e che i principi di conservazione valgono in maniera locale ed inoltre che nelle interazioni alcune grandezze vengono scambiate in maniera quantizzata, cioè in multipli di una certa quantità, come la carica elettrica.

## NOTE CAPITOLO 8

---

<sup>i</sup> Per quanto scritto in questo paragrafo siamo largamente debitori al saggio di Preparata G. “*An Introduction to a realistic Quantum Physics*”.

<sup>ii</sup> Aitchison I. J. R. and Hey A. J. G. “*Gauge Theories in Particle Physics*”, second edition, Adam Hilger, Bristol (GB) (1989).

<sup>iii</sup> Ricordiamo che, senza alcun rigore matematico, dato un operatore lineare  $\mathbf{A}$  definito in uno spazio di Hilbert, si dice operatore aggiunto di  $\mathbf{A}$  l’operatore  $\mathbf{A}^+$  tale che:

$$\langle \mathbf{A}^+ f | g \rangle = \langle f | \mathbf{A} g \rangle$$

per ogni  $\langle f |$  e per ogni  $|g\rangle$  appartenenti rispettivamente al dominio di  $\mathbf{A}^+$  e di  $\mathbf{A}$ .

<sup>iv</sup> Tratto da P. Caldirola, R. Girelli, G. M. Prosperi “*Introduzione alla Fisica Teorica*”, UTET, Torino (1982) pagg. 547, 548.

<sup>v</sup> L. Hackermüller et al. Phys. Rev Lett. **91**, 9 (29 August 2003).

<sup>vi</sup> Devo queste osservazioni essenzialmente ad A. Tonomura, infatti considerazioni simili si possono trovare alle pagine 53-56 del suo libro “*The Quantum World Unveiled by electron Waves*”, World Scientific Publishing, Singapore (1998).