

## CENNI SULLA QUANTIZZAZIONE DEI CAMPI

### Aspetti statistici dell'interazione quantistica

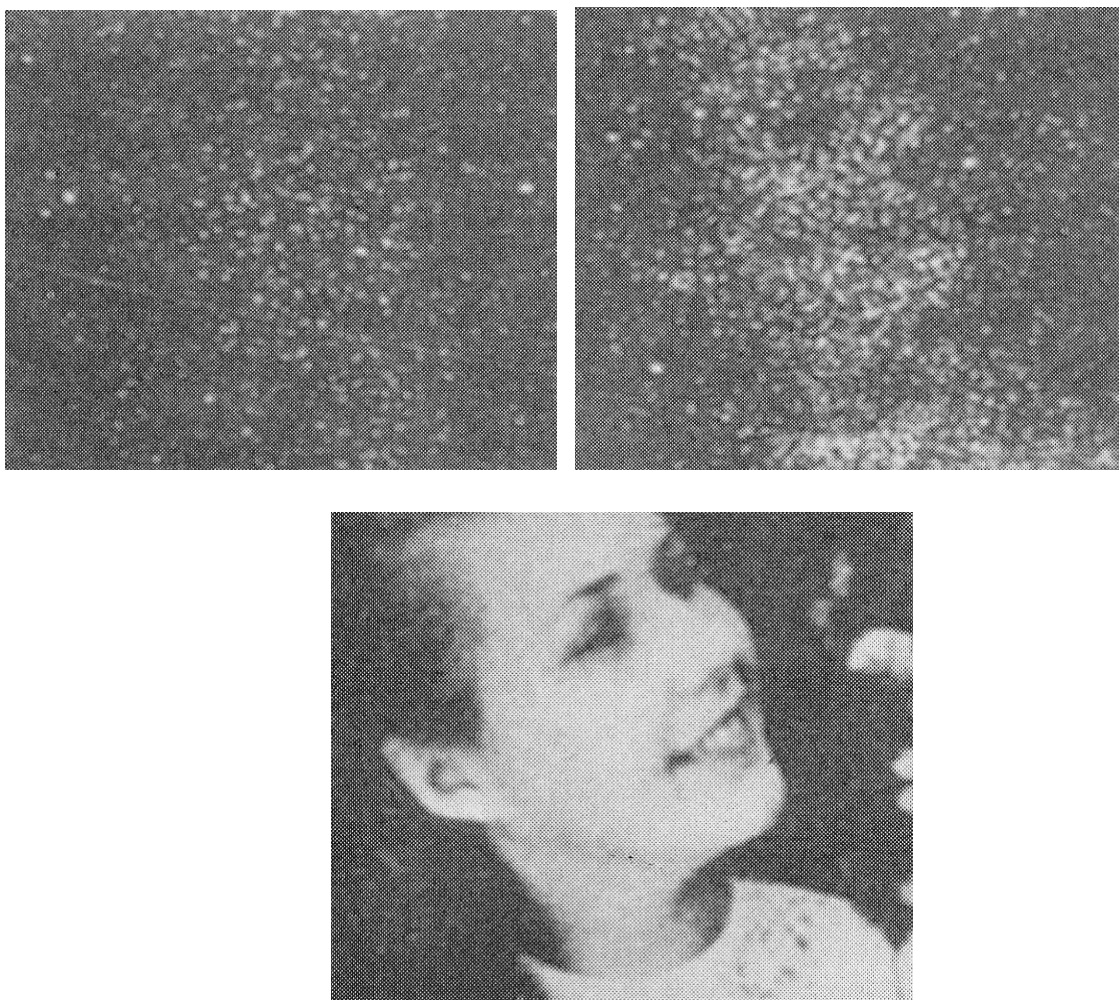
Nei capitoli precedenti abbiamo visto come la propagazione libera, ovvero in assenza di interazione o di autointerazione, di pennelli elettromagnetici o di pennelli materiali possa essere descritta dalle perturbazioni di opportuni campi classici obbedienti ad un'equazione delle onde che viene detta equazione di Klein-Gordon. Abbiamo anche osservato come da essa si possa ricavare il limite per il caso di campi lentamente variabili ed ottenere, così, l'equazione di Schrödinger per campi materiali non quantistici.

Successivamente, a partire dall'analisi delle interazioni chimiche, e proseguendo per analogia con l'analisi delle interazioni radiazioni-materia, abbiamo notato che le leggi fenomenologiche di tali interazioni si possono spiegare come risultato di interazioni elementari, che sono eventi elementari nello spazio-tempo, nei quali vengono scambiati energia, quantità di moto, momento angolare, massa, carica elettrica ecc. in maniera quantizzata. La somma di un numero molto grande di questi eventi elementari riproduce la situazione classica, nel senso che, dopo un numero sufficientemente grande di rilevazioni di quanti, la figura che si ottiene è uguale a quella che conosciamo dalla fisica classica, quando non ci si preoccupa dell'analisi delle interazioni un quanto alla volta ma si considera l'effetto globale prodotto, per esempio, da un fascio di alta intensità.

E' abbastanza evidente che questi eventi presentino un carattere aleatorio, nel senso che non ci possiamo aspettare che siano riproducibili esattamente quando si prepara più volte nello stesso modo la stessa situazione iniziale studiata. In ogni caso, qualunque siano le nostre aspettative, come abbiamo già notato, gli esperimenti mostrano proprio quanto qui osservato, nel senso che, ad esempio, ripetendo più volte nello stesso modo l'esperimento della doppia fenditura un quanto alla volta otterremo che la rivelazione del quanto avviene in generale in punti diversi dello schermo (d'altra parte se non fosse così non otterremmo mai la figura di interferenza; anzi saremmo in grado di distinguere l'evento  $n$ -esimo di rivelazione all'interno di un singolo esperimento a singolo quanto, dal primo evento di rivelazione dell' $n$ -esimo esperimento a singolo quanto; infatti, nel primo caso, ci aspetteremmo che l' $n$ -esimo quanto sia, in generale, rivelato in una posizione diversa da quella del primo, in modo che la rivelazioni di moltissimi quanti mostri la figura di interferenza; nel secondo, invece, ci aspetteremmo di avere la rivelazione del quanto numero 1 sempre nello stesso punto dello schermo, perchè il singolo atto sperimentale sarebbe riproducibile...) e ciò è impossibile perché le due situazioni, qui distinte logicamente, potrebbero benissimo, invece, essere indistinguibili fisicamente. Il problema qui appena accennato è comunque un problema importante, collegato a quello dell'esistenza o meno di variabili "nascoste", variabili cioè non controllabili o non conoscibili dallo sperimentatore, il cui valore determinerebbe, però, il risultato del singolo evento di rivelazione del quanto (per esempio in quale punto della schermo venga rivelato) e sul quale qui non possiamo soffermarci.

Tornando alla distribuzione statistica delle rivelazioni dei quanti, osserviamo che sappiamo già qualcosa di importante: sappiamo che la loro distribuzione media deve fornire il risultato classico. Ciò si capisce, per esempio, pensando che la fotografia di una persona effettuata con luce

sufficientemente intensa è sicuramente riproducibile  $n$  volte; è chiaro, però, che non possiamo aspettarci che la posizione dei punti impressionati sulla lastra, ottenuti scattando la fotografia con luce di debolissima intensità (Fig. 7.1), possa essere riprodotta identicamente qualora la foto venga ripetuta  $n$  volte in tali condizioni.



**Fig. 7.1** Tre fotografie dello stesso soggetto eseguite con luce di bassissima intensità per tempi di posa crescenti.

In compenso, però, la “somma” di tali fotogrammi riproduce la figura ottenuta con luce di alta intensità; ciò spiega qualitativamente perché i singoli fotogrammi a pochi fotoni devono essere in generale tutti diversi fra loro.

### ***Relazioni di De Broglie***

Il fatto che un campo ondulatorio presenti nelle interazioni aspetti quantistici ci spinge a rileggere alcune osservazioni fenomenologiche tenendo conto di questo fatto. Per esempio il legame che avevamo già visto tra lunghezza d'onda di un pennello di elettroni e potenziale accelerante può essere riletto, a questo punto, come un legame tra la lunghezza d'onda e la quantità di moto o l'energia degli elettroni con il quale interagisce il pennello.

Già dalla spiegazione data da Einstein dell'effetto fotoelettrico e dal successivo lavoro di Millikan, così come anche dai lavori relativi all'effetto Compton, sappiamo infatti che i quanti di un campo elettromagnetico hanno energia e quantità di moto legate alla pulsazione e al numero d'onda della radiazione dalle relazioni:

$$E = \hbar\omega; \quad \underline{p} = \hbar \underline{k} \quad . \quad (7.1)$$

Risulta così naturale generalizzare tali relazioni e pensare che valgano per qualunque tipo di campo, elettromagnetico o materiale. Siamo così giunti alle ben note relazioni di De Broglie. Vale la pena, a questo punto fare un'osservazione storica, che rende anche giustizia del fondamentale rapporto dialettico tra teoria ed esperimento: come abbiamo detto nel cap. 1, il comportamento ondulatorio della materia era stato previsto teoricamente da De Broglie, nella sua tesi di dottorato nel 1924<sup>i</sup>, ben prima che fosse osservato sperimentalmente. E', questo, un bell'esempio di come considerazioni di "simmetria" (in questo caso simmetria di "comportamento" tra materia e radiazione per quanto riguarda la validità delle relazioni (1.15)) abbiano in passato e continuino tuttora ad essere una guida per la ricerca in fisica teorica. Noi, però, in questo approccio seguiamo un'altra strada...

Non è difficile, infatti, spiegare il legame sperimentale che lega la lunghezza d'onda del campo elettronico alla differenza di potenziale accelerante pensando all'energia acquistata da un elettrone sottoposto ad una certa differenza di potenziale e poi utilizzando le precedenti relazioni.

Per fare un esempio per maggiore concretezza osserviamo che, utilizzando le formule precedenti, si trova, ad esempio, che a pennelli elettronici di lunghezza d'onda dell'ordine di 0,1 nm, cioè lo stesso ordine di grandezza della separazione degli atomi in un cristallo, possiamo associare quanti (elettroni) aventi velocità dell'ordine di un centesimo della velocità della luce. Ecco perché, storicamente, i piani reticolari dei cristalli sono stati usati (come già accadde per i raggi X) come reticoli di diffrazione per le onde "elettroniche"<sup>ii</sup>.

A proposito delle relazioni di De Broglie e del legame tra aspetti corpuscolari e aspetti ondulatori si parla spesso di dualismo onda corpuscolo. Questo è un modo di esprimersi che genera confusione. Infatti, da un punto di vista come il nostro, gli aspetti corpuscolari sono presenti solo nelle interazioni e il propagarsi libero del campo è sempre descritto in termini ondulatori.

Torniamo a dire che la rivelazione di un quanto ha, però, un carattere aleatorio non esattamente riproducibile, neppure ripreparando identicamente la situazione iniziale.

Per tornare all'esempio dell'esperimento della doppia fenditura, è solo dopo un numero molto grande di ripetizioni che notiamo una distribuzione statistica delle rivelazioni che tende a stabilizzarsi (che cioè è riproducibile) e che è quella su cui possiamo costruire una teoria. L'arrivo di un singolo quanto non può mettere in evidenza le frange di interferenza e, pertanto, non mostra gli aspetti ondulatori sopra citati, che nella descrizione probabilistica data dalla fisica quantistica sono legati alla natura statistica della descrizione.

Questo è un fatto importante: la fisica delle interazioni elementari è intrinsecamente statistica e la rivelazione di un quanto viene descritta in termini probabilistici.

### ***Relazioni di Heisenberg***

Nella maggior parte dei casi nello studio dei fenomeni ondulatori si ha a che fare con gruppi di onde o "pacchetti d'onda" che sono fenomeni limitati nel tempo e nello spazio. Ad esempio la nota suonata da un pianoforte dura un tempo finito e l'onda elettromagnetica prodotta dallo scoccare di un fulmine dura solo una frazione di secondo. In tali condizioni si può dimostrare che l'onda emessa non può essere monocromatica ma, al contrario, essa risulta somma di più onde monocromatiche che hanno frequenza compresa in un intervallo la cui misura  $\Delta\nu$  è collegata alla durata  $\Delta t$  della perturbazione. Come sappiamo, il teorema di Fourier ci assicura che, sotto opportune condizioni matematiche che non staremo qui ad analizzare, la relazione tra  $\Delta t$  e  $\Delta\nu$  è la seguente:

$$\Delta t \Delta\nu \approx 1. \quad (7.2)$$

Il significato fisico di quanto sopra scritto è semplice: sommando infinite onde monocromatiche, scelte in maniera appropriata, si ottiene una localizzazione della perturbazione ondulatoria;

oppure, viceversa, si può immaginare che ogni pacchetto d'onde sia costituito da infinite onde monocromatiche opportune<sup>iii</sup>.

Detto in altro modo e tenendo conto della (7.1), se un pacchetto di onde è localizzato in un intervallo di tempo  $\Delta t$  allora esso si può considerare come somma di infinite onde monocromatiche con frequenze comprese in un intervallo di misura  $\Delta \nu$  tale che risulti

$$\Delta \nu \approx \frac{1}{\Delta t}. \quad (7.3)$$

Per fare un esempio numerico, osserviamo che le moderne tecniche di ottica consentono di preparare impulsi elettromagnetici estremamente brevi, e cioè della durata di circa  $10^{-15}$  s. Tali impulsi sono, allora, estremamente non monocromatici essendo addirittura somma di infinite onde monocromatiche con frequenze contenute in un intervallo di misura  $\Delta \nu \approx 1/\Delta t \approx 10^{15}$  Hz!

Consideriamo un pacchetto di onde elettromagnetiche di durata  $\Delta t$  e centrato attorno alla frequenza  $\nu_0$ . Allora, per quanto detto, questo è somma di infinite onde elettromagnetiche monocromatiche con frequenze appartenenti all'intervallo  $(\nu_0 - \Delta \nu/2, \nu_0 + \Delta \nu/2)$  con  $\Delta \nu$  legato a  $\Delta t$  dalla (7.1).

D'altra parte, come abbiamo visto studiando l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton, un'onda monocromatica di frequenza  $\nu$  interagisce per mezzo di fotoni di quantità di moto  $h\nu/c$ ; quindi il nostro pacchetto, che è somma di infinite onde monocromatiche contenute in un preciso intervallo, sarà in grado di interagire solo per mezzo di fotoni appartenenti anch'essi ad un preciso intervallo di quantità di moto. Essi dovranno, cioè, avere di quantità di moto  $h\nu/c$  con  $\nu$  compresa nell'intervallo di frequenze  $(\nu_0 - \Delta \nu/2, \nu_0 + \Delta \nu/2)$ . Se la durata del pacchetto è  $\Delta t$ , l'interazione potrà avvenire solo in una zona di ampiezza (consideriamo qui per semplicità il caso monodimensionale)  $\Delta x = c\Delta t$ ; quindi, essendo  $p = h\nu/c$ , sempre dalla (7.3) si giunge alla relazione

$$\Delta x \Delta p \approx h, \quad (7.4)$$

dove  $\Delta p = h\Delta \nu/c$ .

Analogamente, se pensiamo che un'onda elettromagnetica di frequenza  $\nu$  interagisce solo per mezzo di fotoni di energia  $h\nu$ , si giunge alla seconda relazione

$$\Delta E \Delta t \approx h \quad (7.5)$$

essendo  $\Delta E = h\Delta \nu$ .

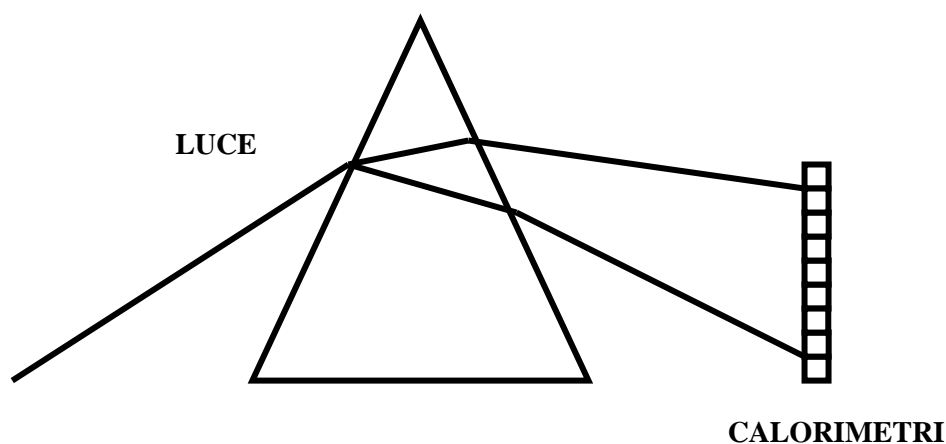
Così che, ad esempio, in ogni esperimento nel quale viene preparato un pacchetto di onde elettromagnetiche ben localizzato, cioè con  $\Delta x$  piccolo, la sua quantità di moto sarà nota solo con una certa imprecisione e, viceversa, se il pacchetto ha una quantità di moto conosciuta con buona precisione allora esso è necessariamente non ben localizzato<sup>iv</sup>.

Per capire meglio il significato delle precedenti relazioni consideriamo un esempio. Immaginiamo di preparare un esperimento ideale nel quale una sorgente di onde elettromagnetiche emetta pacchetti identici di energia  $E \approx h\nu_0$ , centrati attorno alla frequenza  $\nu_0$ , e in modo che risulti  $h\Delta \nu \ll h\nu_0$ ; così che essi siano pacchetti a singolo fotone (cioè in grado di scambiare un solo fotone). Supponiamo, inoltre, che tali pacchetti incidano su un rivelatore ideale che rilevi tutta la radiazione incidente.

Ripetiamo l'esperimento molte volte, sempre nelle stesse condizioni, con il rivelatore costruito in maniera tale da misurare con precisione l'energia dei singoli fotoni scambiati. I risultati ottenuti mostrano chiaramente che le energie misurate non sono sempre le stesse ma, anzi, sono sparpagliate attorno ad un valore medio. Sostituiamo ora il rivelatore con un altro che è in grado di misurare in quali istanti di tempo vengono rivelati i fotoni. Anche in questo caso osserviamo che i risultati

ottenuti sono distribuiti attorno ad un valore medio. Dall'analisi statistica dei risultati troviamo che se  $\Delta t$  e  $\Delta E$  sono gli scarti quadratici medi delle quantità misurate, allora risulta sempre  $\Delta t \Delta E \approx h$ . Il significato delle relazioni in esame sta nel fatto che non è possibile preparare dei pacchetti per cui il prodotto dei precedenti scarti sia zero. Possiamo avere impulsi elettromagnetici estremamente brevi, per i quali, quindi, l'istante di interazione col rivelatore è fissato con grande accuratezza; in tal caso, però, i quanti da essi scambiati hanno un'energia distribuita su un intervallo, la cui ampiezza è tale da verificare le precedenti relazioni. Naturalmente se il pacchetto non è monofotonico quanto da noi detto non cambia se non perché in ogni misurazione il rivelatore conterà più di un fotone<sup>v</sup>.

Osserviamo che quanto detto fino a qui non contraddice la esatta relazione di Planck  $E=h\nu$ . Infatti, in ogni esperimento di fisica nel quale si vada a misurare l'energia della componente monocromatica del pacchetto di frequenza  $\nu$ , si trova sempre che questa vale proprio un multiplo di  $h\nu$ ; solo che, quanto più l'apparato per la misura dell'energia risulta preciso e accurato, tanto più ci sarà un allargamento del pacchetto sul quale verrà effettuata la misura e quindi tanto più risulterà incerto l'istante in cui tale apparato rivelerà i fotoni. Infatti immaginiamo, ad esempio, di mandare un breve impulso elettromagnetico prima attraverso un prisma e poi su una serie di piccoli calorimetri (apparecchi capaci di misurare l'energia elettromagnetica); Fig. 7.2.



**Fig. 7.2** Un pacchetto di onde elettromagnetiche incide prima su un prisma e poi su una serie di calorimetri.

Dalla posizione dei calorimetri raggiunti dalla luce si possono ricavare le frequenze delle onde monocromatiche componenti l'impulso mentre il valore misurato da ciascuno di questi fa conoscere l'energia scambiata da quella particolare componente. Si può così ricavare con grande precisione che la componente di frequenza  $\nu$  scambia energia proprio per multipli di  $h\nu$ . Possiamo così misurare con grande accuratezza l'energia e la quantità di moto dei fotoni scambiati dal nostro impulso ma, nel passare attraverso il prisma, che essendo di vetro è dispersivo, il pacchetto di onde si allarga e la localizzazione dei fotoni diventa quindi sempre meno precisa, come previsto dalla (7.5). Addirittura le tecniche moderne permettono di produrre impulsi a singolo fotone della durata temporale dell'ordine del femtosecondo, così che l'esperimento ideale appena descritto potrebbe consentire di "risolvere" il pacchetto in esame sulla "base" di Fourier delle onde piane e, quindi, di verificare l'esatto legame  $E=h\nu$  per un singolo fotone<sup>vi</sup>.

Come sappiamo anche i campi materiali hanno una propagazione di tipo ondulatorio. Consideriamo, ad esempio, il campo elettronico. Il fatto che tale campo sia quantizzato, vuol dire che ogni volta che viene creata o distrutta una componente di tale campo di lunghezza d'onda  $\lambda$ , viene sempre creata o distrutta una quantità di moto, una energia, un momento angolare, una massa e una carica elettrica multipla rispettivamente delle quantità:  $h/\lambda$ ,  $h$ ,  $h\nu$ ,  $m$ ,  $e$  (cioè per brevità viene scambiato un elettrone di una certa quantità di moto e di una certa energia).

E' quindi evidente che, in modo assolutamente analogo a quello discusso nel caso del campo elettromagnetico, si possono ricavare delle relazioni per il campo elettronico che sono identiche e

hanno analogo significato a quelle precedentemente viste per il campo elettromagnetico.

Vale ora la pena osservare che una analisi più raffinata fornisce delle relazioni che sono appena più restrittive di quelle appena ricavate<sup>vii</sup> e cioè le seguenti:

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar; \quad \Delta t \Delta E \approx \hbar \quad (7.6)$$

o, se si vuole usare il segno di  $\geq$  al posto di quello di  $\approx$ , le seguenti:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}; \quad \Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (7.7)$$

Tutte le nostre considerazioni sono state fatte per un'onda monodimensionale che si propaga lungo l'asse  $x$ . E' evidente che analoghe considerazioni si possono fare per onde che si muovono nello spazio; per tali onde si avranno, con ovvia simbologia, relativamente a tre direzioni fissate, le tre relazioni, di evidente interpretazione:

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar; \quad \Delta y \Delta p_y \approx \hbar; \quad \Delta z \Delta p_z \approx \hbar. \quad (7.8)$$

Queste tre, insieme alla relazione che lega  $\Delta E$  con  $\Delta t$ , qualunque sia il campo quantizzato cui si riferiscono, vengono globalmente chiamate relazioni di Heisenberg, dal nome del premio Nobel per la fisica Werner Heisenberg che per primo le enunciò nel 1927.

## Quantizzazione del campo elettromagnetico

### *Quantizzazione in uno spazio finito*

Vogliamo a questo punto trovare una teoria che spieghi quanto sappiamo: la propagazione libera è descritta da una teoria delle onde, le interazioni con un rivelatore sono descritte in termini quantistici, gli esperimenti mettono in evidenza una struttura statistica delle interazioni i cui valori medi devono ricondursi al caso classico.

Come abbiamo già detto nell'introduzione storica del cap. 1, questa teoria è la teoria quantistica dei campi, una teoria basata fondamentalmente sul concetto di campo, che soddisfa alle equazioni del moto classiche (quando si è in assenza di interazione) e che incorpora al suo interno la quantizzazione e che, ad esempio, ci permetterà di dire che se un pacchetto d'onde elettromagnetiche interagirà con un rivelatore, allora verranno scambiati: con probabilità  $p_1$ ,  $N_1$  fotoni di energia  $\hbar\omega_1$ ; con probabilità  $p_2$ ,  $N_2$  fotoni di energia  $\hbar\omega_2, \dots$ ; con probabilità  $p_n$ ,  $N_n$  fotoni di energia  $\hbar\omega_n$ , ecc..

Proviamo ora a capire, a grandi linee, il senso e i meccanismi formali fondamentali di tale teoria.

Come sappiamo il campo elettromagnetico è descritto, nel *gauge* di Lorentz (che è manifestamente covariante), da un quadripotenziale  $A_\mu$  che, nel vuoto e in assenza di cariche e correnti, obbedisce all'equazione delle onde (4.15). La quantizzazione di tale campo quadrivettoriale pone alcuni problemi legati alla metrica relativistica e che sono stati risolti da Gupta e Bleuler nel 1950<sup>viii</sup>. Noi non ci occuperemo di questi problemi e studieremo, come esempio tanto per capire, la quantizzazione di una sola componente del campo  $A_\mu(\underline{x}, t)$ , che chiameremo  $\varphi(\underline{x}, t)$  come è usuale nella terminologia della teoria delle onde. Per essa varrà, ovviamente, l'equazione:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0. \quad (7.9)$$

Possiamo ancora semplificare la situazione supponendo il problema monodimensionale, nel qual caso possiamo scrivere:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, t) = 0. \quad (7.10)$$

Equazione che vogliamo risolvere nell'intervallo  $[0, L]$  con condizioni di annullamento ai bordi (abbiamo così una situazione analoga a quella di una corda vibrante fissata agli estremi). Come sappiamo la soluzione generale della (7.10) può essere scritta in termini di serie di Fourier come somma di modi normali, cioè (ricordando che  $\varphi$  è una grandezza reale):

$$\varphi(x, t) = i \sum_{n=1}^{\infty} [q(k, t) e^{ikx} - c.c.]; \quad k \equiv \frac{2\pi}{L} n \quad (7.11)$$

Avendo indicato con “c.c.” l'espressione complessa coniugata della precedente. Abbiamo indicato con  $q(k, t)$  l'ampiezza dei modi normali perché le equazioni che scriveremo più sotto saranno molto più evocative con tale simbologia. Ora, perché la (7.11) sia soluzione della (7.10) deve risultare:

$$\sum_k [-k^2 q(k, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} q(k, t) - c.c.] = 0 \quad (7.12)$$

E, quindi, l'equazione:

$$\frac{d^2}{dt^2} q_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = 0; \quad \omega_k \equiv ck \quad (7.13)$$

deve essere valida per ogni  $k$  (ecco perché “ $k$ ” lo abbiamo messo a pedice). Essa è l'equazione di un oscillatore armonico (come, di fatto avevamo già trovato nel cap. 4). La nostra componente del campo è, quindi, un sistema di infiniti oscillatori armonici indipendenti.

Dalla conoscenza del potenziale vorremmo ricavare i valori dei campi elettrico e magnetico, ma è chiaro che per poter fare così avremmo bisogno di scrivere degli operatori differenziali vettoriali (gradiente e rotore) che hanno significato solo nel caso di una trattazione tridimensionale e che, quindi, nel nostro caso ipersemplificato non possiamo utilizzare. Vedremo che a questo inconveniente potremo ovviare in futuro e che, almeno in un primo approccio alla teoria possiamo andare avanti lo stesso.

Il nostro scopo è trovare una teoria basata sull'equazioni delle onde elettromagnetiche e che contenga al suo interno gli aspetti quantistici (cioè, fondamentalmente, gli aspetti statistici degli eventi elementari che chiamiamo “rivelazione di un quanto”). Per fare questo cerchiamo di incorporare, nella teoria che abbiamo, alcuni elementi che permettano di giustificare quello che abbiamo imparato dall'interpretazione di alcuni importanti esperimenti (per esempio l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton) e, cioè, che nell'interazione con un rivelatore, la perturbazione del campo elettromagnetico interagisce per mezzo di quanti di energia  $h\nu$  e quantità di moto  $h\nu/c$ . Stati diversi del campo interagiscono, in generale, con quanti di frequenza diversa ed in numero differente. Concentriamoci, allora, particolarmente sull'energia e sulla quantità di moto del campo elettromagnetico che stiamo considerando (ricordiamoci che qui siamo in una situazione particolarmente semplificata nella quale consideriamo una sola componente del campo e per giunta ne proponiamo una versione monodimensionale).

Possiamo facilmente scrivere l'hamiltoniana, cioè l'energia, del nostro sistema di oscillatori. Infatti essa, per l'insieme degli oscillatori per cui vale la (7.13), è data da:

$$H = \sum_k H_k; \quad H_k = \frac{1}{2} [p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2] \quad p_k \equiv \dot{q}_k. \quad (7.14)$$

Possiamo capirlo molto facilmente ricordando la scrittura dell'energia per un corpo oscillante per effetto di una molla oppure, utilizzando le equazioni di Hamilton, osservare che le  $p_k$  e le  $q_k$  risultano variabili coniugate, e così ricavare dalle (7.14) le equazioni del moto (7.13).

Ora quello che ricerchiamo è un modo per scrivere che le (7.6) esprimono, fissato lo stato del campo elettromagnetico, la possibilità che un'interazione con un rivelatore sia descritta da  $N_1$  eventi del tipo “rivelazione di un fotone di energia  $\hbar\omega_1$ ,  $N_2$  eventi del tipo “rivelazione di un fotone di energia  $\hbar\omega_2$ , ...,  $N_n$  eventi del tipo “rivelazione di un fotone di energia  $\hbar\omega_n$ , con  $N_1, N_2, \dots, N_n$  evidentemente collegati allo stato del campo ma non per questo fissati, non per questo costanti del moto (come si può ben capire, ad esempio, considerando quanto detto a proposito dei pacchetti d'onda elettromagnetici e delle relazioni di Heisenberg). Per capire come rappresentare questa situazione è bene riscrivere la (7.14) operando una trasformazione (lineare) di coordinate e mettendo in evidenza i fattori del tipo  $\hbar\omega_k$ . Poniamo allora:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k q_k + ip_k); \quad a_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k q_k - ip_k). \quad (7.15)$$

Otteniamo, in tal modo:

$$H = \sum_k H_k; \quad H_k = \hbar\omega_k a_k^+ a_k; \quad (7.16)$$

così facendo vediamo che la struttura dell'hamiltoniana risulta molto semplice: essa, per ogni modo  $k$ , risulta data dalla quantità  $\hbar\omega_k$  moltiplicata per il termine  $a_k^+ a_k$ . Per descrivere i dati sperimentali abbiamo bisogno che quest'ultima quantità, una volta valutata sullo stato del campo elettromagnetico, fornisca la statistica della rivelazione dei fotoni che, cioè, detto molto rozzamente, risulti un numero intero positivo cui attribuire una certa probabilità. Per fare questo possiamo “promuovere” il termine  $a_k^+ a_k$  a opportuno operatore che possiamo chiamare “operatore numero di fotoni nel modo  $k$ ”. Visto però che il campo (o meglio la nostra componente del campo) risulta espressa per mezzo delle  $p_k$  e  $q_k$  e, quindi, per mezzo delle (7.15) tramite le  $a_k$  e le  $a_k^+$ , per poter ricavare le espressioni delle grandezze fisiche interessanti, per esempio i valori dei campi elettrico e magnetico, è necessario promuovere a operatori (che agiscono su un qualche spazio degli stati del sistema per ora imprecisato) i singoli  $a_k$  e  $a_k^+$  separatamente, imponendo un “legame” tra questi in modo che i loro prodotti  $a_k^+ a_k$  si comportino “come vogliamo”. Scriviamo quindi (questa condizione trova la sua giustificazione in seguito, proprio per il fatto che con questa condizione otteniamo una teoria consistente):

$$[\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_h^+] = \delta_{kh}; \quad [\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_h] = [\mathbf{a}_k^+, \mathbf{a}_h^+] = 0 \quad (7.17)$$

(come si vede indichiamo in grassetto gli operatori) e interpretiamo  $\mathbf{a}_k^+$  come operatore aggiunto di  $\mathbf{a}_k$ . Le (7.17) prendono il nome di *canonical commutation rules* (ccr). Le conseguenze delle ccr sono molto interessanti; vediamone alcune in un certo dettaglio, sia perché di semplice



dimostrazione sia per capire come semplici proprietà algebriche astratte risultino fondamentali nella descrizione di cui cerchiamo di dare un *flash* (tralasciamo i pedici quando questi sono tutti uguali nelle formule, per comodità di scrittura):

1)  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{a}^+ \mathbf{a}$  è un operatore autoaggiunto (detto operatore numero).

Infatti:

$$(\mathbf{a}^+ \mathbf{a})^+ = \mathbf{a}^+ (\mathbf{a}^+)^+ = \mathbf{a}^+ \mathbf{a} \quad \text{c.v.d.} \quad (7.18)$$

Quindi i suoi autovalori sono tutti reali.

2) Gli autovalori dell'operatore numero sono numeri interi positivi.

Infatti sia  $|n\rangle$  l'autovettore normalizzato di  $\mathbf{n}$  corrispondente all'autovalore  $n$ . Allora:

$$\langle n | \mathbf{n} | n \rangle = \langle n | \mathbf{a}^+ \mathbf{a} | n \rangle = \|\mathbf{a} | n \rangle\|^2 \geq 0 \quad \text{c.v.d.} \quad (7.19)$$

$$3) \quad [\mathbf{n}, \mathbf{a}] = -\mathbf{a}; \quad [\mathbf{n}, \mathbf{a}^+] = \mathbf{a}^+. \quad (7.20)$$

Infatti (dimostriamo solo la prima):

$$[\mathbf{n}, \mathbf{a}] = [\mathbf{a}^+ \mathbf{a}, \mathbf{a}] = \mathbf{a}^+ \mathbf{a} \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{a}^+ \mathbf{a} = (\mathbf{a}^+ \mathbf{a} - \mathbf{a} \mathbf{a}^+) \mathbf{a} \underset{\text{per le ccr}}{=} -\mathbf{a} \quad (7.21)$$

$$4) \quad \mathbf{a} | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle; \quad \mathbf{a}^+ | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle. \quad (7.22)$$

Infatti (anche in questo caso dimostriamo solo la prima) per la (7.12):

$$-\mathbf{a} | n \rangle = \mathbf{n} \mathbf{a} | n \rangle - \mathbf{a} \mathbf{n} | n \rangle = \mathbf{n} \mathbf{a} | n \rangle - n \mathbf{a} | n \rangle \quad (7.23)$$

quindi:

$$\mathbf{n} \mathbf{a} | n \rangle = (n-1) \mathbf{a} | n \rangle \quad (7.24)$$

cioè  $\mathbf{a} | n \rangle$  è autovettore di  $\mathbf{n}$  corrispondente all'autovalore  $n-1$ . Quindi sarà:

$$\mathbf{a} | n \rangle = C | n-1 \rangle \quad (7.25)$$

dove  $C$  è una opportuna costante. Ma allora sarà anche

$$\langle n | \mathbf{a}^+ = C^* \langle n-1 | \quad (7.26)$$

e quindi:

$$\langle n | \mathbf{a}^+ \mathbf{a} | n \rangle = |C|^2 \langle n-1 | n-1 \rangle = |C|^2 \quad (7.27)$$

Da cui

$$C = \sqrt{n} e^{i\theta} \quad (7.28)$$

Essendo  $\theta$  un fattore di fase che può essere posto uguale a zero senza perdita di generalità; cvd.

Per la proprietà (7.25) gli operatori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^+$  sono chiamati rispettivamente operatori di distruzione e di creazione di un quanto.

5) L'autovalore  $n$  è intero.

Infatti, se ciò non fosse vero, potremmo applicare all'autovettore  $|n\rangle$  l'operatore  $\mathbf{a}$  tante volte, ottenendo ciascuna volta un autovettore di  $\mathbf{n}$  con autovalore più piccolo di una unità, fino a raggiungere un autovettore corrispondente ad un autovalore negativo, e questo, per la 2), non è possibile; cvd.

Se, invece,  $n$  è intero la ripetuta applicazione dell'operatore di distruzione condurrà al valore zero al quale evidentemente il processo si ferma.

Quanto detto fin qui vale per ogni modo del campo così che, tenendo conto della (7.16), questa volta interpretata in senso operatoriale, possiamo dire che l'hamiltoniana del campo elettromagnetico diventa un operatore autoaggiunto avente come autovettore degli "stati" del tipo:

$$|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle \equiv |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_k\rangle \dots \quad (7.29)$$

per i quali, con ovvia simbologia, si ha:

$$\mathbf{n}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle \equiv n_k |n_1\rangle |n_2\rangle \dots |n_k\rangle \dots \quad (7.30)$$

Si capisce facilmente che possiamo interpretare lo stato (7.29) come uno stato con  $n_1$  fotoni con pulsazione  $\omega_1$ ,  $n_2$  fotoni con pulsazione  $\omega_2$ , ...  $n_k$  fotoni con pulsazione  $\omega_k$ , ... e avente energia:

$$E = \sum_k n_k \hbar \omega_k. \quad (7.31)$$

Ora, siccome un operatore autoaggiunto ha un sistema ortonormale completo di autovettori, ci risulta naturale individuare lo spazio degli stati del campo elettromagnetico come quello generato da tutti i vettori del tipo (7.29). Tale spazio si chiama spazio di Fock; ogni stato del campo elettromagnetico sarà, quindi un vettore dello spazio di Fock, che penseremo ottenuto da una opportuna combinazione lineare di vettori del tipo (7.29). Mentre la (7.31) si può pensare ottenuta tramite l'operazione:

$$E = \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \mathbf{H} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle. \quad (7.32)$$

Se studiassimo in maniera più formale la teoria cui stiamo qui accennando, vedremmo che le espressioni del tipo (7.32) sono molto generali e, pur di mettere volta in volta al posto di  $\mathbf{H}$  l'operatore corrispondente alla grandezza fisica in esame (quantità di moto, momento angolare ecc.), esse definiscono, il valor medio della grandezza fisica stessa. E', questo, un esempio di come vengano trattati in teoria quantistica dei campi gli aspetti statistici (in questo caso il "valore medio"). Altri aspetti, tipicamente quelli legati al calcolo della probabilità  $p_k$  che in uno stato fissato

vengano rivelati  $n_k$  fotoni di energia  $\hbar\omega_k$ , vengono descritti a partire dai coefficienti dello sviluppo dello stato del campo sul s.o.n.c. (sistema ortonormale completo) degli autovettori di  $\mathbf{H}$ .

Il discorso fatto qui ci ha spinto a promuovere gli  $a$  e gli  $a^+$  a operatori ma è chiaro che se il campo elettromagnetico deve essere pensato in questo modo, cioè come opportuno operatore sullo spazio di Fock, allora la struttura operatoriale di tutte le grandezze costruite tramite il campo, come per esempio l'hamiltoniana sarà un elemento costitutivo, strutturale, fin dall'inizio; è solo perché abbiamo prima costruito una teoria classica del campo elettromagnetico e poi ci siamo accorti della quantizzazione che siamo partiti dal campo classico e poi, in un secondo momento, abbiamo "quantizzato". Ci sembra quindi naturale che tutte le relazioni di commutazione scritte sopra debbano essere pensate come "esistenti" e definenti la struttura del campo fin dall'inizio; ciò significa, in particolare, che anche le  $p$  e le  $q$  presenti nell'hamiltoniana (7.14) saranno grandezze operatoriali, ricavabili ad esempio dalle (7.15). Non stiamo qui a sviluppare i calcoli (peraltro davvero semplici) ma osserviamo solo che facendo così (cioè pensando le  $\mathbf{p}$  e le  $\mathbf{q}$  come operatori con le loro parentesi di commutazione ricavabili dalle  $ccr^{ix}$ ) l'hamiltoniana che otteniamo è:

$$\mathbf{H} = \sum_k \mathbf{H}_k; \quad \mathbf{H}_k = \hbar\omega_k (\mathbf{a}_k^+ \mathbf{a}_k + \frac{1}{2}); \quad (7.33)$$

che differisce dalla (7.16) per un termine divergente, che si può pensare come addendo costante infinito; che si traduce nella (7.31) nel termine aggiuntivo:

$$E_0 = \sum_k \frac{1}{2} n_k \hbar\omega_k . \quad (7.34)$$

Tale espressione viene detta energia di punto zero e coincide con l'energia di uno stato del campo elettromagnetico privo di fotoni, detto stato di vuoto, e che nel nostro formalismo è rappresentato dallo stato  $|0,0,...,0,...\rangle$ .

Un atteggiamento pragmatico è quello di pensare che l'energia è sempre definita a meno di una costante additiva e, quindi, di fatto trascurare l'energia di punto zero o, il che è lo stesso, il termine  $\frac{1}{2}$  nella (7.33); la questione però meriterebbe senz'altro una discussione più approfondita, che qui non possiamo svolgere e che porta all'idea di prodotto normalmente ordinato e a tecniche precise, dette di rinormalizzazione che rendono finite molte grandezze (come qui l'energia) che nei calcoli di teoria dei campi risultano a prima vista infinite.

Come abbiamo già scritto poco sopra, finora abbiamo scelto di considerare un caso semplice, anzi troppo semplice: quello di una sola componente del campo in uno spazio finito monodimensionale. Non svolgeremo qui i calcoli ma è interessante fare alcune considerazioni sulle espressioni del potenziale vettore e dei campi elettrico e magnetico nel caso (ovviamente) tridimensionale; li forniremo nel cosiddetto *gauge* di radiazione, che risulta particolarmente semplice<sup>x</sup>:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_k &= i\omega_k [\underline{\mathbf{q}}_k e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega_k t)} - c.c.] \\ \underline{\mathbf{B}}_k &= i\underline{k} \times [\underline{\mathbf{q}}_k e^{i(\underline{k}\cdot\underline{x} - \omega_k t)} - c.c.] . \end{aligned} \quad (7.35)$$

Come si vede, sono a questo punto i campi stessi che sono diventati operatori!

Invertendo le espressioni "tridimensionali" analoghe delle (7.15), tenendo conto della (7.25) e ricordando che autovettori distinti di un operatore autoaggiunto sono ortogonali, si arriva subito a ricavare l'interessante risultato:

$$\begin{aligned}\langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \underline{\mathbf{E}} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle &= 0 \\ \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots | \underline{\mathbf{B}} | n_1, n_2, \dots, n_k, \dots \rangle &= 0 \quad .\end{aligned}\tag{7.36}$$

Cioè campo elettrico e campo magnetico (ma lo stesso si potrebbe dire del potenziale vettore) hanno valor medio nullo negli autostati a numero fissato di fotoni; tali stati sono, quindi, stati assolutamente non classici. In altre parole tali stati non sono l'analogo quantistico di uno stato del campo elettromagnetico del tipo “onda radio”. Senza soffermarci in dettagli, diciamo solo che la ricerca di stati quantistici analoghi a stati classici conduce a cercare stati  $|\alpha\rangle$  del campo per i quali valgono le relazioni:

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \mathbf{a} | \alpha \rangle &= \alpha \\ \langle \alpha | \mathbf{a}^+ \mathbf{a} | \alpha \rangle &= |\alpha|^2 \quad .\end{aligned}\tag{7.37}$$

Con alcune considerazioni che qui non facciamo gli stati del tipo  $|\alpha\rangle$  si riescono trovare e si chiamano stati coerenti; la loro “forma” è una opportuna combinazione lineare di infiniti stati a numero fissato di fotoni. Quanto scritto nelle righe qui sopra ci fa immediatamente capire quanto la descrizione quantistica del campo elettromagnetico risulti più “ricca” e permetta di descrivere una fenomenologia molto più ampia di quanto consenta la descrizione classica; nel senso che permette sia di descrivere stati del campo coerenti, analoghi agli stati classici (c'è un teorema, detto teorema di Bloch-Nordsieck, che ci assicura che il campo elettromagnetico generato da una corrente classica è proprio uno stato coerente), sia stati incoerenti, anche molto lontani da stati classici. La descrizione che abbiamo qui abbozzato, però, ci fa anche capire che pensare un pacchetto elettromagnetico “classico”, per esempio quello generato da una corrente oscillante, come costituito da un certo numero di fotoni che, emessi dalla sorgente arrivino sul rivelatore, sia del tutto fuorviante. Un esempio tipico di stato elettromagnetico coerente è rappresentato dalla luce di un laser che, quindi, pur non essendo per nulla usuale fino a soli pochi decenni fa, è, in un certo senso una luce molto più “classica” di quella emessa da una lampadina a incandescenza che non è rappresentata da uno stato coerente.

Nella nostra presentazione abbiamo trascurato moltissimi aspetti importanti. Per esempio non ci siamo preoccupati di aver “quantizzato” in un volume finito (nell'intervallo  $[0, L]$ , oppure nel caso tridimensionale, anche se non lo abbiamo specificato, in un volume  $V$ ) invece che nell'intero spazio, mentre il campo elettromagnetico deve essere definito in tutto lo spazio; cosa che comporta la necessità di fare un limite per  $V$  che tende all'infinito (fatto, questo non del tutto banale e che consente, per esempio, di definire in modo ragionevole la quantità di moto, che risulta non molto ben definita per un campo confinato in un volume finito). Come altro esempio di aspetti trascurati citiamo le idee che portano al concetto di *spin*. Non tratteremo lo *spin* in questo scritto, diremo solo che l'idea base è quella di scrivere l'espressione del momento angolare totale del campo elettromagnetico e osservare poi che esso si separa in due componenti; uno del tipo:

$$\sum_{\underline{k}} \hbar \underline{x} \times \underline{k} a_{\underline{k}}^+ a_{\underline{k}} \quad ,\tag{7.38}$$

che rappresenta un momento angolare orbitale, e l'altro del tipo

$$\sum_{\underline{k}} i\hbar (a_{\underline{k}2}^+ a_{\underline{k}1} - a_{\underline{k}1}^+ a_{\underline{k}2}) \quad ,\tag{7.39}$$

(dove abbiamo scelto un riferimento nel quale la componente 3 è diretta come il moto e quelle 1 e 2 sono ortogonali al moto) che rappresenta un momento angolare intrinseco, scritto come somma di termini che daranno luogo (dopo una opportuna trasformazione canonica che rappresenta una rotazione) al concetto di *spin* per ciascun fotone.

Per quanto riguarda, la quantità di moto (trascurando l'indice di spin), risulta:

$$\underline{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \mu_0 \int d^3x \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{B}} \quad = \quad \sum_{\text{facendo i conti}} \sum_{\underline{k}} \hbar \underline{k} \mathbf{a}_{\underline{k}}^+ \mathbf{a}_{\underline{k}} \quad (7.40)$$

da cui risulta che, per ogni fotone

$$\underline{p} = \hbar \underline{k} ; \quad (7.41)$$

ricordando, quindi, l'espressione relativistica dell'energia per una "particella" di massa  $m$ :

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (7.42)$$

e osservando che per la (7.41) il legame fra l'energia e la quantità di moto di un fotone è

$$E = pc \quad (7.43)$$

si ricava immediatamente che possiamo interpretare i quanti di eccitazione dei modi normali (i fotoni) come particelle di massa nulla.

Il procedimento di quantizzazione qui accennato è un procedimento molto generale, che si può utilizzare in molte situazioni fisiche. Proviamo a sintetizzarne alcune aspetti.

- 1) Si parte da un campo fisico obbediente ad una equazione delle onde.
- 2) Si scrivono le soluzioni di tale equazione in termini di serie (o di integrale) di Fourier.
- 3) Si osserva che i coefficienti " $q$ " dei modi normali obbediscono ad una equazione per l'oscillatore armonico.
- 4) Si introducono i momenti " $p$ " canonicamente coniugati alle " $q$ " e si promuovono a operatori definiti sullo spazio di Fock e obbedienti alla condizione  $[\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_h] = i\hbar \delta_{kh}$ . In tal modo il campo fisico stesso viene "promosso" a operatore.
- 5) Si effettua una trasformazione di coordinate che definisce gli operatori di creazione e di distruzione che soddisfano le ccr.
- 6) Si scrivono le grandezze fisiche importanti in funzione dei campi operatoriali così introdotti (per esempio l'energia, la quantità di moto, ecc.) facendo attenzione ad alcune prescrizioni aggiuntive, di cui qui non ci occupiamo, e che servono ad eliminare delle costanti additive infinite.
- 7) Gli stati fisici del sistema saranno rappresentati da un vettore nello spazio di Fock (spazio generato da tutti gli autovettori dell'operatore numero di quanti nello stato  $1, 2, \dots, n, \dots$
- 8) Sia gli stati che le grandezze fisiche risulteranno "naturalmente" quantizzate nel senso che si potrà interpretare l'eccitazione  $n$ -esima del modo normale di pulsazione  $\omega_k$  come stato a  $n$  quanti nel modo  $k^{vi}$ .
- 9) Il valore medio di una grandezza fisica è dato dal valore di aspettazione dell'operatore che rappresenta tale grandezza sullo stato fisico del sistema.

### ***Quantizzazione in uno spazio infinito<sup>xii</sup>***

Possiamo rileggere tutta la nostra procedura immaginando che l'equazione delle onde dalla quale siamo partiti rappresenti l'equazione del moto di alcuni campi operatoriali, soddisfacenti a precise regole di commutazione, deducibile tramite le equazioni di Lagrange a partire da una precisa lagrangiana; dalla quale ricavare poi l'hamiltoniana e le altre grandezze fisiche fondamentali.

La densità lagrangiana dalla quale ricavare, tramite le equazioni di Lagrange, l'equazione delle onde (7.10) è data da

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \quad (7.44)$$

Possiamo ora definire un campo  $\pi(x, t)$ , “momento” canonicamente coniugato al campo  $\varphi(x, t)$ , tramite la relazione generale:

$$\pi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad (7.45)$$

che nel nostro semplice caso diventa:

$$\pi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (7.46)$$

La densità hamiltoniana è quindi subito scritta:

$$H(\varphi, \pi) \equiv \pi \dot{\varphi} - L \quad \underset{\text{facendo i conti}}{=} \quad \frac{1}{2} \left[ \pi^2 + c^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (7.47)$$

Per passare alla quantizzazione possiamo, a questo punto, promuovere il campo e il suo momento coniugato a operatori per i quali valgono le regole di commutazione:

$$[\varphi(x, t), \pi(x', t)] = i\hbar \delta(x - x'). \quad (7.48)$$

Se ora supponiamo che la lunghezza dell'intervallo in cui è definito il campo tenda a infinito dobbiamo sostituire lo sviluppo in serie di Fourier con uno sviluppo in integrale di Fourier (cioè uno sviluppo in onde piane):

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \int \frac{dk}{2\pi 2\omega} \left[ \mathbf{a}(k) e^{i(kx - \omega t)} + \mathbf{a}^+(k) e^{-i(kx - \omega t)} \right] \\ \pi(x, t) &= \int \frac{dk}{2\pi 2\omega} (-i\omega) \left[ \mathbf{a}(k) e^{i(kx - \omega t)} - \mathbf{a}^+(k) e^{-i(kx - \omega t)} \right] \end{aligned} \quad (7.49)$$

dove il fattore  $\omega$  a denominatore è stato inserito per motivi di invarianza relativistica della misura. Dalle (7.48) e (7.49) si ricavano le versioni delle ccr relative al caso continuo per gli operatori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^+$ :

$$[\mathbf{a}(k), \mathbf{a}^+(k')] = 2\pi 2\omega \hbar \delta(k - k') \quad (7.50)$$

*tutti gli altri commutatori sono nulli .*

L'energia del campo è data dall'integrale spaziale della densità hamiltoniana definita dalla (7.47); con alcuni passaggi si ottiene così:

$$\mathbf{H} = \int \frac{dk}{2\pi 2\omega} \frac{1}{2} \hbar \omega [\mathbf{a}^+(k) \mathbf{a}(k) + \mathbf{a}(k) \mathbf{a}^+(k)]. \quad (7.51)$$

La trattazione a questo punto potrebbe continuare in maniera analoga a quanto fatto sopra... anche se noi non lo faremo per motivi di spazio. Per esempio si potrebbe dimostrare l'esistenza di uno stato di minima energia, detto stato di vuoto e indicato con  $|0\rangle$ . Lo stato con fotoni, di numeri d'onda  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , sarebbe, allora, dato da:

$$|k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\rangle = \mathbf{a}^+(k_1) \mathbf{a}^+(k_2) \dots \mathbf{a}^+(k_n) \dots |0\rangle, \quad (7.52)$$

e siccome gli operatori di creazione commutano tutti tra loro lo stato dato dalla (7.52) sarebbe simmetrico per lo scambio dei numeri d'onda e, perciò, i quanti risulterebbero indistinguibili e, per di più, bosoni.

A questo punto ci si può facilmente convincere che il precedente procedimento di quantizzazione si può applicare, con piccoli cambiamenti, ad un qualunque campo libero che obbedisca ad un'equazione delle onde del tipo (7.9) (pur di sostituire a  $c$  la velocità di propagazione delle onde nel campo), si capisce, così, ad esempio, che anche le oscillazioni elastiche nei solidi possono essere descritte in questo modo: esse risultano quantizzate e i loro quanti sono detti fononi. Allo stesso modo si possono introdurre i plasmoni che sono i quanti delle oscillazioni di plasma ecc. Veramente l'idea ingenua di quanto inteso in maniera simile al punto materiale della meccanica classica è insostenibile...

### Le interazioni in teoria dei campi

Per quanto abbiamo scritto sopra il meccanismo della quantizzazione viene applicato ai modi normali del campo e l'hamiltoniana si scrive come somma di termini: una per ciascun modo specifico (si veda per es. l'equazione (7.33)). Inoltre l'operatore numero di quanti è una costante del moto (si potrebbe vedere che questo discende dal fatto che commuta con l'operatore hamiltoniano); allora, per esempio due onde che si propagano in direzioni opposte, ciascuna "contenente" un solo quanto, si attraversano indisturbate, non interagiscono fra loro; e questo perché le equazioni di partenza sono lineari. Ci aspettiamo, pertanto che due modi distinti interagiranno fra loro solo se si potrà andare oltre l'approssimazione armonica che ci ha permesso di partire da equazioni del moto lineari. Cosa che non può succedere nel caso dell'equazione delle onde elettromagnetiche, perché essa discende senza fare approssimazioni dalle equazioni di Maxwell, ma che, per esempio, è vera per le onde elastiche, visto le approssimazioni che dobbiamo fare per ricavare l'equazione delle onde; basta, per questo pensare come viene ricavata l'equazione nel caso delle onde su una corda. In altri termini, perché ci sia interazione (meglio autointerazione) gli oscillatori dovranno essere non lineari. Questo fatto comporterà, nell'espressione dell'hamiltoniana, termini non solo quadratici ma cubici o anche di grado superiore, nei campi, termini, per esempio del tipo  $(\mathbf{a} + \mathbf{a}^+)^3$ . La "nuova" hamiltoniana sarà, allora, somma di due termini: l'hamiltoniana imperturbata del campo libero  $\mathbf{H}_0$  e una hamiltoniana di interazione  $\mathbf{H}_{int}$  (che non commuta con  $\mathbf{H}_0$  e che, quindi, non "conserva" il numero di quanti) moltiplicata per una costante di accoppiamento  $\lambda$ . In formule:

$$H = H_0 + \lambda H_{int} . \quad (7.53)$$

Le manipolazioni algebriche che ci hanno fatto trovare l'espressione dell'energia in caso di assenza di interazione adesso non funzionano più e la strategia che si usa per trovare l'energia del nuovo stato interagente è quella di scrivere lo stato “reale”  $|r\rangle$  del campo in funzione degli autovettori di  $H_0$  (che tanto sappiamo che formano un s.o.n.c.):

$$\begin{aligned} |r\rangle &= \sum_{\underline{n}} c_{r\underline{n}} |\underline{n}\rangle \\ |\underline{n}\rangle &\equiv |n_1, n_2, \dots\rangle \end{aligned} \quad (7.54)$$

Si può dimostrare che il significato dei coefficienti  $c_{r\underline{n}}$  è dato dal fatto che  $|c_{r\underline{n}}|^2$  rappresenta la probabilità che ci siano “ $\underline{n}$ ” quanti di  $H_0$  (i “soliti”, insomma) nello stato “reale”  $|r\rangle$  ottenuto dallo stato non perturbato  $|r_0\rangle$ . L'energia di tale stato si ottiene con uno sviluppo “perturbativo” basato sul fatto che la costante  $\lambda$  si possa considerare sufficientemente piccola, come si intuisce dalla formula seguente:

$$E_r = E_r^{(0)} + \lambda E_r^{(1)} + \lambda^2 E_r^{(2)} + \dots \quad (7.55)$$

dove  $E_r^{(0)}$  è l'energia dello stato non “perturbato” e gli altri termini sono termini, sempre più complicati da calcolare, dei quali i primi sono:

$$E_r^{(1)} = \langle r_0 | H_{int} | r_0 \rangle; \quad E_r^{(2)} = \sum_{s \neq r_0} \frac{\langle r_0 | H_{int} | s \rangle \langle s | H_{int} | r_0 \rangle}{E_r^{(0)} - E_s^{(0)}} . \quad (7.56)$$

Il caso più interessante, però, è quello nel quale i campi sono due, uno in interazione con l'altro. Questo è il caso, per esempio del campo elettronico in interazione con il campo elettromagnetico. In tal caso, come si può forse intuire, l'hamiltoniana di interazione contiene termini con almeno tre operatori di campo; si ottiene così tutta l'elettrodinamica quantistica...

### Quantizzazione del campo di Schrödinger

Nel capitolo 4 abbiamo trovato che in approssimazione non relativistica l'equazione delle onde per un campo materiale è data da

$$\left( \frac{1}{2\mu} \nabla^2 - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\underline{x}, t) = 0. \quad (7.57)$$

In modo simile a quanto fatto nel caso del campo elettromagnetico, e limitandoci al caso monodimensionale, possiamo introdurre una densità lagrangiana da cui discenda tramite le equazioni di Lagrange la (7.57); essa è:

$$L = i\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{1}{2\mu} \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi . \quad (7.58)$$

Da essa, come prima, possiamo ricavare la densità di momento canonicamente coniugato al campo:



$$\pi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^* \quad (7.59)$$

e promuovere, quindi, sia il campo che il suo momento coniugato a operatori soddisfacenti la (7.48). E' possibile ora sviluppare il campo in serie di Fourier:

$$\Psi(x,t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{L}} \mathbf{a}_k(t) e^{ikx} \quad (7.60)$$

e osservare che la sostituzione della (7.60) nella (7.58) porta all'equazione:

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{a}_k(t) = \frac{k^2}{2\mu} \mathbf{a}_k(t), \quad (7.61)$$

la cui soluzione ci dice che gli  $\mathbf{a}_k$  sono oscillatori armonici complessi di pulsazione

$$\omega_k = \frac{k^2}{2\mu}. \quad (7.62)$$

Con un discorso del tutto simile a quello fatto precedentemente potremo introdurre lo spazio di Fock e calcolare espressioni analoghe a quelle calcolate nel caso del campo elettromagnetico, per esempio l'energia e la quantità di moto risulteranno rispettivamente:

$$\mathbf{H} = \sum_k \frac{k^2}{2\mu} \left( \mathbf{a}_k^+ \mathbf{a}_k + \frac{1}{2} \right); \quad \mathbf{P} = \sum_k k \left( \mathbf{a}_k^+ \mathbf{a}_k + \frac{1}{2} \right). \quad (7.63)$$

Senza entrare in dettagli matematici, se a questo punto volessimo introdurre delle interazioni, tenendo conto di quanto scritto nel paragrafo precedente, non dovremo fare altro che sottrarre alla densità lagrangiana "libera" (7.58) un termine di potenziale  $\mathbf{V}$  non lineare nei campi, ottenendo così una lagrangiana del tipo:

$$\mathbf{L} = i\psi^+ \frac{\partial}{\partial t} \Psi + \frac{1}{2\mu} \psi^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi - \mathbf{V}(\psi^+ \Psi). \quad (7.64)$$

Nella (7.64) abbiamo, come al solito, promosso i campi a operatori; possiamo, inoltre introdurre l'operatore densità di momento

$$\pi(x,t) = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\Psi}} = i\psi^+(x,t), \quad (7.65)$$

in virtù delle ccr si ha così:

$$[\Psi(x,t), \pi(x',t)] = i\delta(x-x'); \quad [\Psi(x,t), \Psi^+(x',t)] = \delta(x-x'). \quad (7.66)$$

Nel caso in cui il potenziale sia nullo, l'hamiltoniana classica è data da:

$$H = \int dx (\pi \dot{\psi} - L) = \int dx \left( -\frac{1}{2\mu} \psi^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi \right), \quad (7.68)$$

la sua promozione a operatore deve tenere conto della non commutatività degli operatori di campo data dalle (7.66). In generale la prescrizione che si sceglie è la seguente:

$$\mathbf{H} \equiv \int dx \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2\mu} \left[ \Psi^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \right) \Psi^+ \right] \right\}; \quad (7.69)$$

espressione equivalente alla (7.63). Se, invece, vogliamo evitare di avere a che fare con energie infinite, date dal fattore  $\frac{1}{2}$  nelle (7.63), la prescrizione fondamentale che si utilizza in teoria dei campi è quella detta dell'ordinamento normale e consiste nello scrivere tutti gli operatori di creazione alla destra di quelli di distruzione. Con tale prescrizione l'hamiltoniana diventa formalmente ancora più simile a quella classica:

$$\mathbf{H} = \int dx (\pi \dot{\Psi} - \mathbf{L}) = \int dx \left( -\frac{1}{2\mu} \Psi^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \right). \quad (7.70)$$

Senza ora entrare nei dettagli dei calcoli diremo ancora solo che nel caso in cui ci fosse autointerazione del campo l'hamiltoniana si scriverebbe:

$$\mathbf{H} = \int dx (\pi \dot{\Psi} - \mathbf{L}) = \int dx \left( -\frac{1}{2\mu} \Psi^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi \right) + \int dx dy \Psi^+(x) \Psi^+(y) V(x-y) \Psi(x) \Psi(y). \quad (7.71)$$

Per quanto scritto sin qui, e ricordando quanto detto dopo la (7.52), risulta così che i quanti del nostro campo risultano bosoni. Il nostro trattamento è, così, utile per descrivere un insieme di particelle non relativistiche di *spin* intero come ad esempio i pioni neutri o le  $K^0$ , risulta, invece, inadeguato per descrivere un insieme di fermioni (come ad esempio gli elettroni). E' possibile introdurre un procedimento di quantizzazione del campo di Schrödinger diverso da quello qui esposto, proprio per descrivere i fermioni. Non staremo qui a presentare tutto il formalismo necessario, osserveremo soltanto che, così come la quantizzazione dei campi bosonici risiede fondamentalmente nelle ccr e nelle proprietà 1),...,5) che da esse discendono, la quantizzazione dei campi fermionici discende principalmente dalla seguenti regole di anticommutazione, dette *canonical anticommutation rule*:

$$[\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_h^+]_+ \equiv \mathbf{a}_k \mathbf{a}_h^+ + \mathbf{a}_h^+ \mathbf{a}_k = \delta_{kh}; \quad [\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_h]_+ = [\mathbf{a}_k^+, \mathbf{a}_h^+]_+ = 0. \quad (7.72)$$

Gli operatori  $\mathbf{a}_k^+$  e  $\mathbf{a}_k$  si possono ancora interpretare come operazioni di creazione e di distruzione di quanti di numero d'onda  $k$  e si ha ancora, perciò, lo stato di vuoto  $|0\rangle$ , solo che essendo per le (7.72)

$$(\mathbf{a}_k^+)^2 = \mathbf{a}_k^2 = 0, \quad (7.73)$$

ne consegue che l'operatore numero di quanti nel modo  $k$  ha come autovalori solo 0 e 1 e perciò lo spazio di Fock risulta generato da tutti e soli i vettori del tipo:

$$|1_{k_1}, 0_{k_2}, \dots, 1_{k_n}, \dots\rangle = \mathbf{a}_{k_1}^+ \dots \mathbf{a}_{k_n}^+ \dots |0\rangle \quad (7.74)$$

così come prescrive il principio di esclusione di Pauli. (In effetti, la scelta delle proprietà di commutazione degli operatori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^+$  è dettata principalmente da due condizioni: la prima è che l'operatore numero abbia autovalori interi, così da avere la quantizzazione del campo, e la seconda è che valga un criterio di corrispondenza che faccia evolvere in maniera "classica" i valori medi delle grandezze fisiche; (si può dimostrare che ambedue le condizioni sono soddisfatte sia dalle ccr sia dalle car).

Un'ultima osservazione: se a questo punto, osservando le espressioni (7.63), introduciamo delle unità di misura più usuali (quelle del Sistema Internazionale), per esempio con l'immissione della costante  $\hbar$ , la costante  $\mu$ , tipica del campo considerato, può essere interpretata come massa del quanto del campo ed avere così un significato più pregnante ed usuale.

Molte davvero sono le cose importanti che abbiamo trascurato ma, ciononostante, termineremo qui questa brevissima introduzione sulla quantizzazione dei campi, sperando che la sommaria presentazione delle idee qui descritte sia sufficiente a permettere di capire le motivazioni didattiche di quanto scritto in questi capitoli.

## NOTE CAPITOLO 7

<sup>i</sup> De Broglie L. V., « Recherches sur la théorie des quanta », *Annales de Physique*, **3**, 22-128 (1925).

<sup>ii</sup> Davisson C., Germer L. H., *Phys. Rev.*, **30**, 505 (1927).

<sup>iii</sup> Jackson J. D., *Elettrodinamica classica*, Nicola Zanichelli, Bologna (1984), pagg. 270 e segg.

<sup>iv</sup> Nelle righe precedenti ci siamo principalmente concentrati su pacchetti d'onda localizzati spazialmente o temporalmente. In meccanica quantistica è, invece, spesso più utile considerare pacchetti ben "centrati" sui numeri d'onda o sulle frequenze.

<sup>v</sup> Se l'energia media del pacchetto è  $E_0 = nh\nu_0$  e  $h\nu_0 \leq nh\Delta\nu/n$  allora, in ripetizioni successive dell'esperimento, il numero di fotoni contati dal rivelatore sarà, in generale di volta in volta diverso.

<sup>vi</sup> Braginsky V. B., Khalili F. Y., *Quantum Measurement*, Cambridge University Press, Cambridge (UK) (1992), ISBN 0 521 41928 X, pagg. 1-6.

<sup>vii</sup> La differenza è solo in un fattore  $2\pi$ .

<sup>viii</sup> Gupta S. N., *Proc. Phys Soc. London*, **A63**, 681 (1950).

<sup>ix</sup> Si avrebbe, in tal caso,  $[\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_h] = i\hbar\delta_{kh}$ .

<sup>x</sup> Il *gauge* di radiazione è fondamentalmente definito dalla condizione  $\underline{\nabla} \cdot \underline{A} = 0$ .

<sup>xi</sup> In queste poche pagine abbiamo provato a quantizzare i campi in una scatola, un parallelepipedo, di volume finito; nelle pagine seguenti proveremo a quantizzare in uno spazio infinito. E', però, interessante anche ripetere il procedimento di quantizzazione sopra descritto per un campo contenuto in un volume finito di forma diversa dal parallelepipedo: troveremo ancora uno sviluppo in modi normali le cui eccitazioni sono quantizzate da opportuni operatori di creazione e di distruzione; ora, però, i modi sono, in un certo senso, "complicati", le oscillazioni di forma "strana", diversa da quella delle onde piane o dalle onde stazionarie in un parallelepipedo, cui siamo abituati; nel caso del campo elettromagnetico (magari immaginiamolo in un dielettrico di forma opportuna) i fotoni sono ora i quanti di tali "strani" modi normali.

<sup>xii</sup> Vedi, ad esempio: Aitchison I. J. R. and Hey A. J. G. "*Gauge Theories in Particle Physics*", second edition, Adam Hilger, Bristol (GB) (1989).