

## CAMPI CONTINUI: EQUAZIONE DELLE ONDE

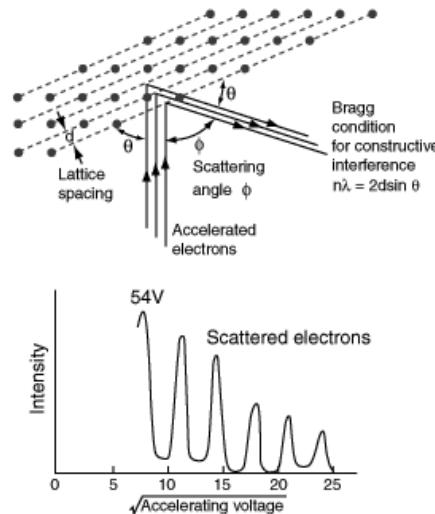
### Premessa

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, a partire dalla fine degli anni '80 del secolo scorso sono stati fatti molti esperimenti di interferenza e di diffrazione utilizzando pennelli materiali che mostrano comportamenti tipici di un campo ondulatorio.

Abbiamo già detto che la maggior parte di questi esperimenti è stata effettuata, in realtà, con fasci di bassissima intensità, in modo che, nell'interazione col rivelatore, risultino evidenti le proprietà di localizzazione spazio-temporale tipiche dell'interazione quantistica; essi sono cioè, come si suol dire, esperimenti a "particella" singola. Nulla vieta, però, di effettuare, o di immaginare di effettuare, tali esperimenti con fasci di elevata intensità ottenendo, così, risultati del tutto simili a quelli dell'ottica elettromagnetica, tanto da indurci ad usare, in questi casi, la dicitura di "ottica materiale", come abbiamo fatto precedentemente.

E' usuale interpretare esperimenti di questo tipo in termini quantistici, spiegando, anche quelli effettuati con fasci di alta intensità, come ad esempio quello di Davisson e Germer<sup>i</sup> (diffrazione di un fascio elettronico da parte di un cristallo, Fig. 4.1), in base alle relazioni di De Broglie (che discuteremo in seguito) e facendo esplicito riferimento alla lunghezza d'onda associata alle particelle.

Però, vista la grande analogia di comportamento tra pennelli materiali (preparati opportunamente in modo che si possano considerare sostanzialmente non autointeragenti) e pennelli elettromagnetici, così come non è necessario introdurre concetti quantistici per interpretare la fenomenologia dell'ottica fisica, non è necessario farlo nel caso di pennelli materiali ad alta intensità. Nel capitolo precedente abbiamo visto che un semplice modello ondulatorio è in grado di interpretare tutta la fenomenologia presentata; però, così come le equazioni di Maxwell fondano una teoria che va ben più al di là di un mero modello fenomenologico, allo stesso modo è possibile formulare una teoria di campo che potremmo definire "classica", simile all'elettromagnetismo, che sia molto più profonda del modello che abbiamo proposto per la propagazione ondulatoria. Visto che l'argomento ci sembra non troppo noto, contiamo di mostrare, qui di seguito, una possibile strada per arrivare a costruire



**Fig. 4.1** Tratta da: Davisson C. J., "Are Electrons Waves?", *Franklin Institute Journal* 205, 597 (1928).

tal teoria in modo significativo e non puramente formale, come si trova spesso nei manuali di teoria quantistica dei campi.

### L'equazione delle onde nella materia

Abbiamo già detto che nella fisica classica alla fine dell'ottocento il mondo è idealmente diviso in due: i corpi materiali da una parte e l'interazione tra questi corpi dall'altra. La materia che costituisce i corpi è descritta, in fisica newtoniana, in termini di punti materiali ma è più naturale descrivere situazioni macroscopiche per mezzo di equazioni relative a un continuo caratterizzato da alcune proprietà. Per esempio un fluido che scorre in un condotto è caratterizzato, punto per punto, da un valore della pressione, da un vettore velocità, da una temperatura, da una densità ecc. In fisica, quando abbiamo una zona dello spazio in cui è possibile definire punto per punto una proprietà, diciamo che siamo in presenza di un campo. Con riferimento agli esempi precedenti parleremo di campo di pressione, di velocità, di temperatura e di densità rispettivamente. Tramite questi campi possiamo dare una descrizione del sistema studiato in termini di densità di quantità di moto, densità di energia, densità di momento angolare ecc.. Abbiamo, poi, delle equazioni relative al loro “comportamento”; esempi ne sono l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (4.1)$$

(dove compaiono la densità di massa  $\rho$  e la densità di quantità di moto  $\rho \underline{v}$ ); l'equazione di Bernoulli per un fluido perfetto incompressibile, che con ovvia simbologia si scrive:

$$\rho \frac{\underline{v}^2}{2} + p + u = \text{cost} \quad (4.2)$$

(dove compaiono  $\rho \frac{\underline{v}^2}{2}$  e  $u$ , rispettivamente densità di energia cinetica ed energia potenziale per unità di massa) e anche l'equazione di stato di un gas perfetto:

$$pV = nRT \quad (4.3)$$

(dove la presenza esplicita del volume  $V$  indica, implicitamente, il fatto che la pressione “sia” una densità di energia).

Le interazioni tra i continui materiali sono anch'esse descritte in termini di campi continui che sono mediatori di forze che agiscono localmente. Emblematico a questo proposito è l'utilizzo del campo elettromagnetico per descrivere le interazioni tra continui carichi.

Anche per i campi di forza si dà una descrizione in termini di densità, per esempio di densità di energia elettromagnetica (con ovvia simbologia):

$$w = \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{H} \cdot \underline{B}) \quad (4.4)$$

e, in effetti, la dinamica della materia è regolata da scambi di quantità di moto, di energia, di momento angolare, ecc., tra i continui materiali e i campi. Tipico è il caso dell'accoppiamento tra continui carichi e campi elettromagnetici: le distribuzioni di cariche generano campi

elettromagnetici, la cui espressione è data dalle equazioni di Maxwell; i campi a loro volta agiscono sulle cariche con una forza detta forza di Lorentz.

Fondamentali, nella descrizione di questi processi di interazione, sono le ben note leggi di conservazione, legate a simmetrie del sistema.

Le variazioni locali nelle grandezze che caratterizzano il campo si propagano nel campo stesso e la loro propagazione è descritta da un'equazione delle onde del tipo:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0. \quad (4.5)$$

Per esempio variazioni locali di pressioni in un gas danno luogo a onde sonore... In generale le onde saranno elastiche nella materia; mentre sono onde elettromagnetiche, gravitazionali ecc. nel caso dei campi di forza (e, proprio per questo le equazioni che ne descrivono la propagazione sono un poco differenti dalla (4.5)).

### L'equazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto

Per motivi di chiarezza di quanto segue presentiamo qui, molto brevemente, il percorso che porta, dalle equazioni di Maxwell, all'equazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto, in assenza di cariche e correnti.

Con ovvia simbologia le equazioni di Maxwell nel vuoto sono date da:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \left( \underline{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right) . \end{cases} \quad (4.6)$$

Le prime due, come si vede non contengono sorgenti, mentre le seconde due, invece, sì.

Dalle prime due segue che esistono due funzioni  $\underline{A}(\underline{x}, t)$  e  $A_0(\underline{x}, t)$ , tali che:

$$\begin{cases} \underline{B} = \nabla \times \underline{A} \\ \underline{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} . \end{cases} \quad (4.7)$$

Le funzioni  $\underline{A}(\underline{x}, t)$  e  $A_0(\underline{x}, t)$  non sono, però, univocamente determinate, infatti se  $\underline{A}(\underline{x}, t)$  è una arbitraria funzione, detta funzione di *gauge*, si ha che anche le funzioni  $\underline{A}'$  e  $A_0'$  così definite:

$$\begin{cases} \underline{A}' = \underline{A} + \nabla \Lambda \\ A_0' = A_0 - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{cases} \quad (4.8)$$

sono ancora “buoni” potenziali, nel senso che sostituiti rispettivamente al posto di  $\underline{A}$  e  $A_0$ , le (4.7) valgono ancora.

In termini dei potenziali la terza e la quarta equazione delle (4.6) diventano, allora:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_0 - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_0 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \underline{A} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} - \underline{\nabla} \left( \underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) = -\mu_0 \underline{J} \end{cases} \quad (4.9)$$

Equazioni piuttosto complicate che possiamo cercare di semplificare facendo una scelta opportuna della funzione di *gauge*. Scegliamo, per esempio,  $A(\underline{x}, t)$  in modo che risulti sempre verificata la seguente condizione:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{A} + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial A_0}{\partial t} = 0. \quad (4.10)$$

Alla scelta di un *gauge* in modo che valga la condizione (5) viene dato il nome di *gauge* di Lorentz (come si vede bene dalla sua definizione, che tratta in maniera simmetrica lo spazio e il tempo richiedendo l’annullamento della quadridivergenza del quadripotenziale, essa è relativisticamente covariante). Ponendo, inoltre:

$$c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (4.11)$$

le (4.9) diventano:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_0 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} = -\mu_0 \underline{J} \end{cases} \quad (4.12)$$

Se ora siamo in assenza di cariche e correnti (il che significa che la densità di carica  $\rho$  e la densità di corrente  $\underline{J}$  sono entrambe nulle) le (4.12) si semplificano ulteriormente e diventano:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_0 = 0 \\ \nabla^2 \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

Allora, introducendo il quadrivettore

$$A_\mu = (A_0, \underline{A}); \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad (4.14)$$

l’insieme delle (4.13) si può riscrivere in modo più compatto:

$$\nabla^2 A_\mu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_\mu = 0. \quad (4.15)$$

Ecco ottenuto quanto volevamo; infatti la (4.15) rappresenta l'equazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto in assenza di cariche e correnti.

### L'equazione di Klein-Gordon come equazione di un campo non quantistico

Nel capitolo precedente abbiamo posto il problema della caratterizzazione dei pennelli materiale utilizzati nei vari esperimenti (elettronico, neutronico, di fullerene, ecc.). In analogia a quanto fatto per descrivere le onde nei mezzi elastici o le onde elettromagnetiche, introduciamo anche per i nostri "pennelli" l'idea che esista un campo "sottostante" dal quale ricavare le proprietà che li caratterizzano. Introduciamo così, per esempio, un densità di massa (oppure di carica, oppure di quantità di moto, di energia ecc.) per lo specifico pennello in esame e consideriamo un campo tramite il quale ricavare tale quantità in un certa regione. Supponiamo, quindi, che un pennello materiale sia descritto dalle variazioni di un campo  $\psi$  dal quale ricavare le grandezze che servono a caratterizzare il pennello.

Nelle prossime pagine arriveremo a scrivere un'equazione delle onde "classica" che descriverà la propagazione della materia, di cui abbiamo visto alcuni esempi di fenomenologia nel capitolo precedente, tramite le perturbazioni del campo appena considerato, dal quale, per esempio, ricaveremo le variazioni di densità di massa che descrivono la distribuzione spaziale del pennello, istante per istante. Nel farlo ci faremo guidare da ciò che già sappiamo del campo elettromagnetico, vista la grande analogia di comportamento tra pennelli materiali e pennelli elettromagnetici per quanto riguarda i fenomeni prima descritti.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che una generale perturbazione elettromagnetica (per semplicità trascuriamo tutte le questioni relative alla polarizzazione) è descritta dal quadripotenziale  $A_\mu$  che soddisfa l'equazione delle onde (4.15)<sup>ii</sup>:

$$0 = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A_\mu(\underline{x}, t). \quad (4.16)$$

Abbiamo qui posto, per semplicità  $c=1$  e adottato la convenzione, tipica in relatività, nella quale la componente  $A_0$  rappresenta il potenziale scalare mentre le componenti  $A_1, A_2, A_3$ , rappresentano il potenziale vettore.

Ciascuna componente del quadrvettore si può rappresentare come integrale di Fourier, facendone uno sviluppo in onde piane:

$$A_\mu(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[ a_\mu^+(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - k_0 t)} + a_\mu^-(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} + k_0 t)} \right] \quad (4.17)$$

$$a_\mu^-(\underline{k}) = a_\mu^+ * (-\underline{k})$$

(dove la condizione sugli  $a_\mu$  scaturisce dalla richiesta che il quadripotenziale sia una funzione reale).

Osserviamo che l'integrandi della (4.17) è costituito da onde piane complesse, dove  $a_\mu^+$  è l'ampiezza dell'onda progressiva,  $a_\mu^-$  di quella regressiva e aventi lunghezza d'onda e periodo rispettivamente dati da:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\underline{k}|}; \quad T = \frac{2\pi}{k_0}. \quad (4.18)$$

Pertanto la (4.17) rappresenta un pacchetto di onde elettromagnetiche sviluppato in onde piane. Dall'espressione del quadripotenziale si può ricavare facilmente l'espressione del campo elettromagnetico; infatti valgono le ben note relazioni:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}A_0 - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}; \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}. \quad (4.19)$$

Ovviamente perché la (4.17) rappresenti davvero una generale perturbazione elettromagnetica, essa deve soddisfare l'equazione (4.16) delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

E' importante osservare che la generica onda piana, di cui la (4.17) è una sovrapposizione, soddisfa l'equazione delle onde elettromagnetiche (4.16) se e solo se vale la relazione:

$$0 = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \left[ a^\mu(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - k_0 t)} \right] = k_v k^v. \quad (4.20)$$

Nella (4.20) abbiamo utilizzato la convenzione di somma sugli indici ripetuti, con la metrica di Minkowsky, ovvero:

$$k^v k_v \equiv k^0 k_0 - k^1 k_1 - k^2 k_2 - k^3 k_3. \quad (4.21)$$

Tale espressione rappresenta il quadrato del modulo del quadrivettore  $k^v$  e, pertanto, è uno scalare.

Vista l'analogia di comportamento di pennelli materiali e pennelli elettromagnetici negli esperimenti di interferenza, noi supponiamo che per un campo materiale valga uno sviluppo in onde piane analogo allo sviluppo (4.17) (che vale componente per componente). Cominciamo a considerare, nel modo più semplice, come abbiamo detto nel paragrafo precedente, un campo scalare<sup>iii</sup>  $\psi$ , scriviamo, quindi:

$$\psi(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \ e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \left[ c^+(\underline{k}) e^{-ik_0 t} + c^-(\underline{k}) e^{ik_0 t} \right]. \quad (4.22)$$

Come si vede la (4.22) è un'espressione formalmente identica alla (4.17) tranne che per aver raccolto a fattore comune il termine  $e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}}$ .

Come abbiamo visto la condizione (4.20), e cioè  $k_v k^v = 0$ , caratterizza le onde elettromagnetiche; essa non può, quindi, essere assunta come valida anche per le onde materiali descritte dalla (4.22). Per ottenere la descrizione di un campo materiale proviamo, allora, a farne la più naturale generalizzazione, supponendo che risulti:

$$k_\nu k^\nu = \mu^2 \quad (4.23)$$

essendo  $\mu^2$  una generica costante (ricordiamo che deve essere uno scalare perché è uno scalare  $k_\nu k^\nu$ ), in generale diversa da zero. Da quanto detto potremo, ad esempio, ritenere che  $\mu^2$  sia collegata al fatto che il nostro campo è un campo massivo.

A causa di questa costante il campo espresso nella (4.22) non può più soddisfare l'equazione delle onde elettromagnetiche. Essa soddisfa, invece, l'equazione seguente<sup>iv</sup>:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2 \right) \psi(\underline{x}, t) = 0. \quad (4.24)$$

Possiamo verificarlo subito, se non stiamo tanto a curare gli aspetti matematici. Infatti gli operatori presenti nella (4.24) “passano dentro” l'integrale della (4.22) e inoltre gli operatori differenziali non operano sui  $c(\underline{k})$ ; così che, considerando per brevità il caso monodimensionale lungo l'asse  $x$ , si ha:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu^2 \right) \psi(x, t) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int dk \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu^2 \right) e^{ikx} \left[ c^+(k) e^{-ik_0 t} + c^-(k) e^{ik_0 t} \right] = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int dk \left( -(\mu^2 + k^2) + k^2 + \mu^2 \right) e^{ikx} \left[ c^+(k) e^{-ik_0 t} + c^-(k) e^{ik_0 t} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

### L'equazione di Schrödinger come equazione di un campo non quantistico

Le relazioni di dispersione forniscono il legame tra  $k_0$  e  $\underline{k}$  ovvero tra frequenza e lunghezza d'onda delle onde considerate. Per il campo elettromagnetico e per i campi materiali esse si possono ricavare dalla (4.20) e dalla (4.23). Per il campo elettromagnetico si ha così:

$$k_0 = |\underline{k}| \quad (4.26)$$

e per i campi materiali:

$$k_0 = \sqrt{\mu^2 + |\underline{k}|^2} . \quad (4.27)$$

Finora la costante  $\mu$  non ha ricevuto un'adeguata interpretazione fisica, possiamo cominciare adesso a dirne qualcosa. Osserviamo innanzitutto che i diversi valori di  $\mu$  caratterizzano diversi campi materiali e che, in un certo senso che sarà più chiaro in seguito,  $\mu$  potrà essere considerata una massa caratteristica del campo (e in effetti  $\mu$  vale zero per il campo elettromagnetico...). Dal punto di vista dimensionale, poi,  $\mu$  è l'inverso di una lunghezza e perciò, per così dire, essa fissa anche una lunghezza caratteristica per ciascun campo, lunghezza rispetto alla quale ha senso considerare una scala di variabilità di tale campo nello spazio. Possiamo dire, perciò, in modo naturale, che il campo varia lentamente se la

lunghezza d'onda centrale del pacchetto è molto maggiore dell'inverso di  $\mu$ . In simboli, e utilizzando le variabili che compaiono nella (4.27) se  $\frac{|\underline{k}|}{\mu} \ll 1$  (condizione che risulta valida

nella maggior parte delle fenomenologie ottiche). Quando vale tale condizione diciamo di essere nel caso, o nell'approssimazione, di campi lentamente variabili. Con tale approssimazione risulta:

$$k_0 = \sqrt{\mu^2 \left[ 1 + \left( \frac{|\underline{k}|}{\mu} \right)^2 \right]} \quad \frac{|\underline{k}|}{\mu} \ll 1 \quad \mu + \frac{|\underline{k}|^2}{2\mu} \quad (4.28)$$

Sostituendo nella (4.22) l'espressione di  $k_0$  data dalla (4.28) si ha:

$$\psi(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \ e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} \left[ c^+(\underline{k}) e^{-i\left(\mu + \frac{|\underline{k}|^2}{2\mu}\right)t} + c^-(\underline{k}) e^{i\left(\mu + \frac{|\underline{k}|^2}{2\mu}\right)t} \right] \quad (4.29)$$

Ora, però, la (4.29) non soddisfa l'equazione (4.24). Infatti la parte spaziale della (4.30) contiene  $\underline{k}$  mentre quella temporale contiene  $\underline{k}$  al quadrato. Se derivassimo due volte rispetto al tempo e due volte rispetto allo spazio, come indicato nella (4.24), otterremmo un termine con un fattore  $\underline{k}$  al quadrato e un termine con un fattore  $\underline{k}$  alla quarta. Ciò porterebbe, evidentemente a termini che non potrebbero certamente annullarsi, come dovrebbe invece avvenire se la (4.29) soddisfacesse la (4.24).

Nel tentativo di trovare una nuova equazione, di cui vogliamo la che (4.29) sia soluzione, sembra allora ragionevole cercare un'equazione che contenga la derivata prima rispetto al tempo e la derivata seconda rispetto alle componenti spaziali. Purtroppo una tale l'equazione non esiste, infatti i due addendi (contenenti i  $c^+$  o i  $c^-$ ) in cui si può separare la (4.29) danno contributi di segno diverso quando vengono derivati una sola volta rispetto al tempo.

Siamo così indotti a scrivere due equazioni che si differenziano una dall'altra proprio per un segno: un'equazione per la parte contenente i  $c^+$ , l'altra per la parte contenente i  $c^-$ .

Fatta questa scelta possiamo anche trascurare a esponente il termine  $\mu$  perché esso risulta soltanto un ininfluente fattore moltiplicativo del tipo  $e^{-i\mu}$  o  $e^{i\mu}$  a seconda della scelta effettuata. Abbiamo così che se scegliamo per equazione "buona" quella che ha per soluzione il termine della (4.29) contenente i  $c^+$  troviamo l'equazione:

$$\left( \frac{1}{2\mu} \nabla^2 + i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.30)$$

la cui soluzione generale è (per quanto abbiamo appena detto):

$$\psi(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \ e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} c^+(\underline{k}) e^{-i\frac{|\underline{k}|^2}{2\mu}t} \quad (4.31)$$

se invece ci interessiamo maggiormente al contributo del termine contenente i  $c$  abbiamo.

$$\left( \frac{1}{2\mu} \nabla^2 - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.32)$$

Come abbiamo già detto, nella (4.31) compare un fattore  $\underline{k}$  nel termine in  $\underline{x}$  mentre c'è un fattore  $|\underline{k}|^2$  nel termine in  $t$ . In questo modo spazio e tempo non risultano più "trattati" nella stessa maniera e questo è un sintomo del fatto che la nostra espressione non è relativistica, e questo è dovuto all'approssimazione di campi lentamente variabili fatta sopra. Infatti, in una trasformazione di Lorentz, spazio e tempo vengono mescolati linearmente tra loro e, perciò, equazioni covarianti per trasformazioni di Lorentz (cioè che non cambiano aspetto quando si passa da un sistema di riferimento inerziale ad un altro) devono necessariamente avere spazio e tempo trattati alla stessa stregua (stessi esponenti, stesso ordine di derivazione ecc.).

Da quanto qui osservato, discende che i campi descritti dalla (4.31) sono campi che si muovono a bassa velocità (infatti siamo nel caso di una approssimazione non relativistica). D'altra parte sappiamo di essere nel caso di campi lentamente variabili, cioè campi caratterizzati da una lunghezza d'onda sufficientemente grande, e perciò anche a bassa frequenza. Questo ci spinge a collegare fra loro velocità e frequenza osservando che pacchetti a "bassa velocità" sono pacchetti a "bassa frequenza" e, quindi, viceversa, quelli "ad alta velocità" saranno ad alta frequenza.

E' facile osservare che la scelta del segno della costante  $\mu$  permette di passare da una delle due equazioni all'altra. Possiamo, pertanto, scegliere una qualsiasi delle due equazioni come equazione fondamentale, diciamo la (4.30), permettendo a  $\mu$  di assumere entrambi i valori (positivo e negativo) della  $\sqrt{\mu^2}$ .

Questa nostra analisi ci spinge a considerare per ogni valore di  $|\mu|$  due campi distinti, caratterizzati dal segno di  $\mu$  positivo o negativo. Chiameremo i primi campi di materia i secondi campi di antimateria.

Possiamo pensare alla (4.24) come ad un'equazione molto generale, soddisfatta da tutti i campi, elettromagnetici o materiali, che si propagano liberamente e senza interazione. Tanto per avere in mente alcuni ordini di grandezza significativi della costante  $\mu$ , per tali campi si ha che:

nel caso della luce  $\mu = 0$

nel caso dei raggi catodici  $\mu \sim 4 \times 10^{11} \text{ m}^{-1}$

nel caso dei pennelli di elio  $\mu \sim 3 \times 10^{15} \text{ m}^{-1}$ .

Ricordiamo che, per semplicità, in tutti i conti precedenti abbiamo posto  $c = 1$ . Se non avessimo fatto questa posizione, l'equazione di Klein-Gordon sarebbe stata scritta come segue:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2 c^2 \right) \psi(\underline{x}, t) = 0. \quad (4.33)$$

In tal caso le dimensioni di  $\mu$  sarebbero state quelle di un tempo diviso per il quadrato di una lunghezza, nel Sistema Internazionale la sua unità di misura sarebbe il  $\text{s/m}^2$ .

Siccome noi abbiamo dato a  $\mu$  il significato di massa caratteristica del campo, viene spontaneo chiedersi se è possibile trovare un fattore di conversione tra questa unità di misura e quella più usuale del chilogrammo. La risposta a questa domanda è affermativa e il fattore conversione è la notissima costante di Planck divisa per  $2\pi$ . Non vogliamo ora affrontare questo discorso, se non per l'osservazione appena fatta, perché ci porterebbe davvero troppo lontano dai nostri scopi.

Tornando ora all'equazione (4.21), osserviamo che, per come è stata costruita, la sua soluzione generale è data da:

$$\psi(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k \ e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} c^+(\underline{k}) e^{-i \frac{|\underline{k}|^2}{2\mu} t} \quad (4.34)$$

tal funzione, nel passaggio alla Meccanica Quantistica, prenderà il nome di funzione d'onda e avrà un significato differente da quello qui esposto.

Osserviamo ancora che, a differenza di quanto succede in elettromagnetismo, la soluzione dell'equazione di Schrödinger è una funzione complessa e che, quindi, per ricavare espressioni fisicamente significative dobbiamo ottenere da essa delle espressioni reali. Una di esse è  $|\psi(\underline{x}, t)|^2$ .

Per capire il significato di tale espressione notiamo, dalla (4.34), che  $\psi(\underline{x}, t)$  è l'(anti)trasformata di Fourier di:

$$c^+(\underline{k}) e^{-i \frac{|\underline{k}|^2}{2\mu} t} \quad (4.35)$$

e che, quindi, ricordando che la trasformata di Fourier conserva la norma<sup>v</sup>, possiamo dire che

la norma al quadrato di  $\psi(\underline{x}, t)$  è uguale alla norma al quadrato di  $c^+(\underline{k}) e^{-i \frac{|\underline{k}|^2}{2\mu} t}$ , cioè:

$$\int d^3 x |\psi(\underline{x}, t)|^2 = \int d^3 k |c^+(\underline{k}) e^{-i \frac{|\underline{k}|^2}{2\mu} t}|^2 = \int d^3 k |c^+(\underline{k})|^2 \quad (4.36)$$

così che l'integrale su tutto lo spazio di  $|\psi(\underline{x}, t)|^2$  non dipende da  $t$ .

L'equazione (4.36) ci dice che mentre il modulo quadro di  $\psi(\underline{x}, t)$  varia nello spazio e nel tempo, il suo integrale su tutto lo spazio rimane costante. Ciò porta ad interpretare tale modulo quadro come descrivente una grandezza che pur variando localmente si conserva globalmente. Ci è quindi naturale pensare che valga un'equazione di continuità, nella quale il modulo quadrato di  $\psi(\underline{x}, t)$  rappresenti una densità  $\rho(\underline{x}, t)$  di qualche grandezza che varia con continuità e per la quale valga l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\underline{x}, t)|^2 + \underline{\nabla} \cdot \underline{J}(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.37)$$

dove  $\underline{J}$  è una densità di corrente della grandezza di cui  $\rho(\underline{x}, t) = |\psi(\underline{x}, t)|^2$  è la densità. In effetti si trova che l'equazione precedente è soddisfatta se definiamo

$$\underline{J}(\underline{x},t) \equiv \frac{i}{2\mu} [\psi(\underline{x},t) \nabla \psi^*(\underline{x},t) - \psi^*(\underline{x},t) \nabla \psi(\underline{x},t)] . \quad (4.38)$$

Ora,  $|\psi(\underline{x},t)|^2$  è un numero puro e, quindi  $\mu|\psi(\underline{x},t)|^2$  può essere facilmente interpretata come densità di massa del sistema materiale, mentre  $P(x,t) = \mu \underline{J}(\underline{x},t)$ , con tale interpretazione diventa la densità di quantità di moto<sup>vi</sup>.

A questo punto è abbastanza facile costruire espressioni per altre grandezze fisiche significative; per esempio la densità di energia legata alla convezione del continuo materiale è data da<sup>vii</sup>:

$$w(\underline{x},t) = \frac{1}{2} \mu \frac{|\underline{J}(\underline{x},t)|^2}{|\psi(\underline{x},t)|^2} . \quad (4.39)$$

Riassumiamo il significato di quanto è stato qui fatto osservando che il punto di partenza delle usuali presentazioni della teoria quantistica dei campi è postulare un campo classico che obbedisce alle equazioni del moto ricavate da una densità lagrangiana opportunamente scelta. Nel caso dell'elettromagnetismo il significato di tale campo è evidente: esso è il ben noto campo quadrivettoriale del potenziale elettromagnetico classico, quello della teoria di Maxwell. Nel caso dei campi materiali, invece, al campo di cui si parla non viene, in generale, attribuito alcun significato fisico, esso è uno strumento tecnico che acquista significato quando viene promosso ad operatore, scegliendo un spazio di Hilbert e imponendo precise regole di commutazione, in modo da ottenere la teoria quantistica dei campi. Abbiamo qui mostrato come attribuire, in analogia a quanto accade in elettromagnetismo, un significato fisico anche a tale campo materiale e a ricavare per esso un'equazione del moto che non sia in alcun modo legata ad aspetti quantistici o particellari.

### L'equazione di Schrödinger in presenza di forze elettromagnetiche

Quanto visto fin qui descrive il comportamento del continuo materiale in assenza di forze esterne, in maniera analoga all'equazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Vogliamo ora descrivere il comportamento del continuo quando, invece, sono presenti delle forze. Per questo si possono seguire varie strade: si può partire dall'analogia con il comportamento delle onde elettromagnetiche in presenza di un mezzo in cui varia l'indice di rifrazione (che gioca, per i campi materiali, un po' un ruolo analogo a quello del potenziale elettromagnetico, perché curva la traiettoria di propagazione), oppure possiamo partire dalla soluzione generale della (4.31) e aggiungere nell'esponenziale un opportuno termine per poi cercare un'equazione di cui la "nuova" funzione ottenuta sia soluzione. Noi seguiremo una strada diversa, più vicina allo spirito del nostro lavoro: quello della ricerca di simmetria.

Partiamo osservando che vale un'invarianza di fase globale per il continuo materiale, nel senso che, variando di un fattore di fase costante l'espressione della  $\psi$ , le grandezze fisiche (che ricordiamo devono essere espressioni reali) risultano invariate.

In effetti la fase di una funzione d'onda non è misurabile, mentre sono misurabili delle differenze di fase. Per esempio in un esperimento di interferenza nel quale si ha la sovrapposizione di due contributi  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , il termine di interferenza è dato da:

$$I = 2|\psi_1^*(\underline{x},t)| |\psi_2(\underline{x},t)| \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (4.40)$$

dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono rispettivamente le fasi di  $\psi_1$  e  $\psi_2$ . Nel fare i calcoli, però, una fase va scelta: è arbitraria ma una convenzione deve essere fatta. Per essere ancora più esplicativi, se  $\psi$  è soluzione dell'equazione di Schrödinger, possiamo operare la trasformazione di fase globale

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad (4.41)$$

dove  $\alpha$  è una costante reale scelta arbitrariamente, senza con ciò alterare la descrizione fisica, mentre non siamo liberi di fare un cambiamento di fase locale scegliendo, cioè,  $\alpha$  dipendente dal punto. Ad esempio, nell'esperienza della doppia fenditura, inserendo una lamina mezz'onda davanti ad una delle due fenditure (cioè operando una trasformazione di fase su uno solo dei due contributi alla funzione d'onda complessiva) la disposizione delle frange di interferenza cambia<sup>viii</sup>. Insomma: scelta la convenzione sulla fase in una certa regione, la stessa convenzione deve essere adottata in tutte le altre regioni. Questa proprietà sembra troppo restrittiva, nel senso che non appare del tutto naturale che (forzando un po' il concetto) l'informazione sulla scelta della fase si trasporti istantaneamente in tutti i punti dello spazio e in ogni istante di tempo. Richiediamo, pertanto, che l'invarianza per una trasformazione di fase globale venga estesa ad un'invarianza di fase locale. Ci chiediamo come modificare la (4.41) in modo che la trasformazione:

$$\psi(\underline{x}, t) \rightarrow \psi'(\underline{x}, t) = e^{i\alpha(\underline{x}, t)} \psi(\underline{x}, t) \quad (4.42)$$

sia ancora una simmetria del sistema<sup>ix</sup>. Che la nuova funzione d'onda non soddisfi più l'equazione (4.30) è, infatti, evidente per il fatto che gli operatori differenziali presenti nella (4.30) agiscono anche su  $\alpha(\underline{x}, t)$ .

La nostra richiesta trova la seguente soluzione: la (4.22) è una simmetria per il campo materiale se nella (4.30) operiamo le seguenti sostituzioni

$$\begin{cases} -i\underline{\nabla} \rightarrow -i\underline{\nabla} - q\underline{A}(\underline{x}, t) \\ i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - qA_0(\underline{x}, t) \end{cases} \quad (4.43)$$

dove  $q$  è una opportuna costante, e se supponiamo che, associate alla (4.43), valgano anche le trasformazioni:

$$\begin{cases} \underline{A}(\underline{x}, t) \rightarrow \underline{A}'(\underline{x}, t) = \underline{A}(\underline{x}, t) + \frac{1}{q} \underline{\nabla} \alpha(\underline{x}, t) \\ A_0(\underline{x}, t) \rightarrow A_0'(\underline{x}, t) = A_0(\underline{x}, t) - \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial t} \alpha(\underline{x}, t) . \end{cases} \quad (4.44)$$

Cioè, supponendo che  $\psi(\underline{x}, t)$  sia soluzione della "nuova" equazione di Schrödinger, ottenuta dalla (4.30) operando le sostituzioni dettate dalla (4.44)

$$\left[ \frac{1}{2\mu} (-i\underline{\nabla} - q\underline{A}(\underline{x}, t))^2 + i\frac{\partial}{\partial t} - qA_0(\underline{x}, t) \right] \psi(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.45)$$

allora, con alcuni calcoli che non riportiamo per brevità ma che non presentano particolari difficoltà, si trova che  $\psi'(\underline{x}, t)$ , data dalla (4.42) soddisfa l'equazione

$$\left[ \frac{1}{2\mu} (-i\nabla - q\underline{A}'(\underline{x}, t))^2 + i\frac{\partial}{\partial t} - qA_0'(\underline{x}, t) \right] \psi'(\underline{x}, t) = 0 \quad (4.46)$$

Con le quantità “primarie” date dalla (4.44).

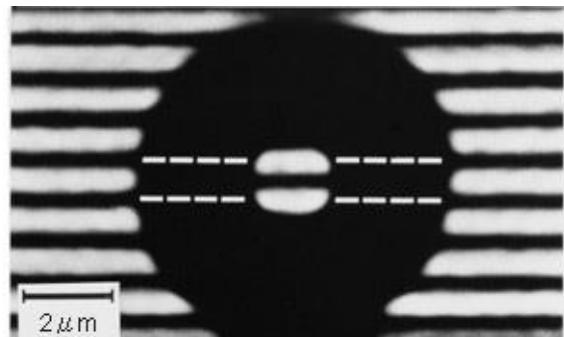
L'importanza di questo fatto è subito evidente se si pensa che le (4.44) sono identiche alle trasformazioni di *gauge* dei potenziali elettromagnetici e se s'interpreta la costante  $q$  come carica caratteristica del campo<sup>x</sup>. Abbiamo così trovato che la richiesta di invarianza rispetto ad una trasformazione di fase locale, conduce a trovare la forma dell'equazione per il continuo materiale in interazione con il campo elettromagnetico; in altre parole la simmetria richiesta si manifesta nell'impossibilità di distinguere tra l'effetto ottenuto con un cambiamento di fase locale e l'effetto ottenuto con l'introduzione di un nuovo campo di forze nel quale si muove il continuo materiale.

Osserviamo che i potenziali elettromagnetici compaiono esplicitamente nella (4.45) e sembrano collegati con la fisica del problema in maniera diretta, non solo indirettamente come utili strumenti matematici per ottenere l'espressione dei campi elettrico e magnetico. È questo un fatto nuovo che ci spinge a considerare situazioni in cui i campi elettrico e magnetico sono nulli nelle zone investite dal continuo materiale ma nelle quali i valori dei potenziali conducono a fattori di fase diversi lungo due cammini differenti.

Senza entrare in maggiori dettagli osserviamo che è proprio quello che si trova inserendo un solenoide virtualmente infinito immediatamente al di là delle due fenditure in un esperimento d'interferenza (il solenoide va sistemato in modo da essere “tra le due fenditure, parallelo ad esse e in modo da non intercettare il fascio elettronico”). Anche se i due contributi del continuo materiale (quello che passa dalla prima fenditura e quello che passa dalla seconda) non risentono di alcun campo magnetico, passando essi completamente al di fuori del solenoide, ciò nonostante la figura di interferenza cambia se il campo magnetico, interno al solenoide, è acceso oppure è variato. Questo accade perché il valore del campo magnetico nel solenoide è collegato al potenziale vettore anche al di fuori di esso; è per questo che la fase relativa dei due contributi del campo materiale, quello che passa attraverso una fenditura e quello che passa attraverso l'altra, cambia al cambiare dei valori del campo magnetico: da ciò segue un cambiamento della figura di interferenza.

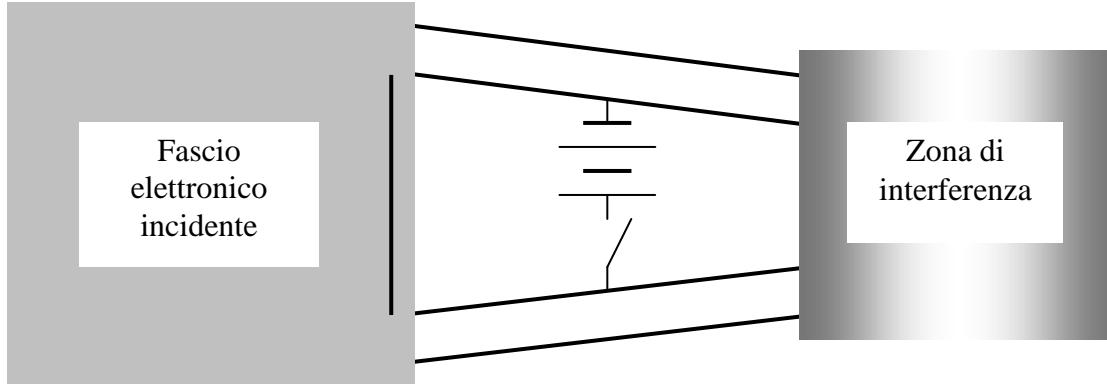
In Fig 4.2 si può vedere lo *shift* nella figura di interferenza in un esperimento simile a quello qui esposto nel quale il solenoide è sostituito da magnete toroidale completamente schermato da niobio superconduttivo.

E' abbastanza ovvio, inoltre, che anche il potenziale scalare è in grado di indurre effetti simili (Fig. 4.3).



**Fig 4.2** Tratta da: Tonomura A. et Al. “Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron waves”, *Phys. Rev. Lett.* **56** (8) 24 February 1986.

Lo spostamento delle frange dentro il buco del magnete toroidale (dal quale non fuoriesce campo magnetico), rispetto a quelle fuori, indica l'esistenza dell'effetto Aharonov-Bohm.



**Fig 4.3** Schema di esperimento ideale in cui un fascio elettronico passa all'interno di due cilindri conduttori tra i quali è possibile applicare una differenza di potenziale e va poi a interferire al di là di questi. In base alle previsioni dell'effetto Aharonov-Bohm, al variare della differenza di potenziale la figura di interferenza dovrebbe cambiare pur non essendo ciascun “pezzo” del fascio soggetto al alcuna forza, se si usa l'accortezza di accendere la differenza di potenziale solo per il periodo in cui i fascio è interno cilindri.

Ad un effetto di questo tipo si dà il nome di effetto Aharonov-Bohm, dal nome dei due fisici che lo hanno previsto nel 1959.

Finiamo con l'osservazione, che non dimostriamo, che essendo il campo gravitazionale newtoniano esprimibile in termini di una potenziale scalare  $\Phi$ , l'effetto della forza di gravità sul nostro continuo materiale sarà dato, abbastanza ovviamente da:

$$\left( \frac{1}{2\mu} \nabla^2 + i \frac{\partial}{\partial t} - \mu\Phi \right) \psi = 0 . \quad (4.47)$$

Chiudiamo questo capitolo dicendo che, ancora più in generale se il continuo materiale è soggetto ad un potenziale  $U$ , l'equazione che regola il suo comportamento è la seguente:

$$\left( \frac{1}{2\mu} \nabla^2 + i \frac{\partial}{\partial t} - U \right) \psi = 0 . \quad (4.48)$$

Ovvero, scrivendo in un modo che ci sarà utili più avanti:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathbf{H} \psi \quad (4.49)$$

essendo

$$\mathbf{H} \equiv -\frac{1}{2\mu} \nabla^2 + U . \quad (4.50)$$

## NOTE CAPITOLO 4

<sup>i</sup> Davisson C. e Germer L. H., *Phys. Rev.*, **30**, 705 (1927)

<sup>ii</sup> L'equazione (4.16) è un caso particolare dell'equazione delle onde, che regola il comportamento di una generica perturbazione ondulatoria che si propaghi in un mezzo lineare, e che, indicando con  $\varphi$  la generica grandezza vibrante si scrive:

$$0 = \left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi(\underline{x}, t)$$

La  $v$  che compare nell'equazione rappresenta la velocità della perturbazione (per esempio la velocità del suono se l'equazione è relativa alle onde sonore o la velocità di propagazione del calore ecc., ecc.).

<sup>iii</sup> Con tale semplificazione non siamo in grado di trattare gli stati di polarizzazione, per esempio quelli del campo elettronico; la cosa, comunque si potrà fare successivamente con poco sforzo.

<sup>iv</sup> Essa è l'equazione di Klein-Gordon per un campo classico.

<sup>v</sup> Senza alcuna attenzione matematica ricordiamo che si dice trasformata di Fourier di  $f(x)$  la funzione:

$$F(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x).$$

Si può dimostrare che:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} F(k)$$

Indicando con  $\langle f|g \rangle$  il prodotto scalare fra  $f$  e  $g$  si ha, con ovvia simbologia che  $\langle f|g \rangle = \langle F|G \rangle$ , e questo significa che la trasformata di Fourier è isometrica e, perciò conserva la norma.

<sup>vi</sup> Osserviamo che, per come è definita, anche  $j(\underline{x}, t)$  è una funzione reale.

<sup>vii</sup> Questa espressione così intuitiva vale, però, soltanto in assenza di interazione tra il campo materiale e un campo di forze esterno (come in questo caso).

<sup>viii</sup> t'Hooft G. *Sci. Am.* **242** (6) 90-116 (1980).

<sup>ix</sup> Aitchison I. J. R., Hey A. J. G. "Gauge Theories in Particle Physics" *Adam Hilger* (1989).

<sup>x</sup> Nella nostra trattazione la costante  $q$  è stata messa in evidenza un po' "a mano". Si potrebbe essere un po' più sofisticati partendo da considerazioni sulla conservazione della carica elettrica ma le conclusioni essenziali non cambierebbero.