

BREVE INTRODUZIONE STORICA

Premessa

Come introduzione alle idee che seguiranno nel testo, riassumiamo qui, brevemente, alcune ben note tappe fondamentali che hanno portato all'attuale visione quantistica del mondo e alla costruzione della "migliore teoria" che abbiamo: l'elettrodinamica quantistica. La presentazione che segue è largamente incompleta, anche su punti fondamentali, ed è appena abbozzata negli ultimi paragrafi, ciononostante riteniamo che possa servire per meglio comprendere il "razionale" di ciò che sarà successivamente presentato. In particolare alcuni aspetti che riteniamo noti verranno appena accennati, altri, invece, che a nostro parere sono meno conosciuti, riceveranno qualche attenzione in più ma non per questo saranno da considerarsi in qualche modo più importanti.

Fisica classica

Non è agevole definire con precisione che cosa si intenda per "fisica classica", anche se questa è una locuzione talmente comune nelle presentazioni della fisica moderna e ci si sia talmente abituati ad essa da non ritenere necessario che essa venga precisata. Le cose, a nostro parere, però, non stanno proprio così; infatti non possiamo pensare all'elettromagnetismo di Maxwell solo come ad un "pezzo" di elettromagnetismo da aggiungersi alla meccanica di Newton, perché la visione del mondo sottostante alle due teorie è diversa. La visione termodinamica e quella proveniente dalla meccanica statistica non convivono proprio pacificamente; questi sono solo due esempi che ci fanno capire quanto sia difficile, e, per certi aspetti anche errato o, per lo meno, improprio, "affettare" il mondo della fisica in due sole parti ben distinte: da una parte la fisica classica e dall'altra la fisica moderna. Ciononostante, non essendo queste pagine delle pagine di storia della fisica e per semplicità di esposizione, cominceremo a intendere con fisica classica quell'insieme di conoscenze e quella visione del mondo (per la verità non così ben definita) che si avevano della fisica a fine ottocento. Vedremo più avanti che una ridefinizione della questione potrebbe essere utile per una migliore comprensione della fisica quantistica.

Verso la fine del 1800 la fisica era fondata su due rappresentazioni distinte della realtà: quella di materia, composta di molecole o comunque di particelle discrete; e quella dei campi di forze continui, come il campo elettromagnetico e il campo gravitazionale. Alcune precise equazioni differenziali, come le equazioni di Newton o quelle di Maxwell governavano la dinamica di materia e radiazione e descrivevano le loro interazioni per mezzo del formalismo lagrangiano e hamiltoniano. Questa dicotomia tra le due rappresentazioni, una data in termini di particelle e l'altra in termini di campi; le prime dotate di un numero finito di gradi di libertà, i secondi dotati, invece, di un numero infinito di gradi di libertà, è il motivo principale della profonda crisi che era destinata a subire la fisica classica tra la fine del 1800 e l'inizio del 1900.

Corpo nero ed effetto fotoelettrico

Dal punto di vista storico il problema emerse con tutta chiarezza a proposito dello spettro della radiazione emessa da un corpo nero (Fig. 1.1); il modello classico di Rayleigh e Jeans prevedeva,

infatti, la cosiddetta catastrofe ultravioletta, cioè che, nel caso di equilibrio termodinamico di un campo elettromagnetico contenuto in una cavità finita, l'energia del campo divergesse al crescere della frequenza. Questa previsione non solo era in contrasto con i dati sperimentali ma mostrava anche una intrinseca inconsistenza del modello; cioè non solo il modello non era corretto perché non rappresentava i dati sperimentali ma metteva in luce quella che poteva essere (e in realtà è) un'inconsistenza intrinseca della teoria.

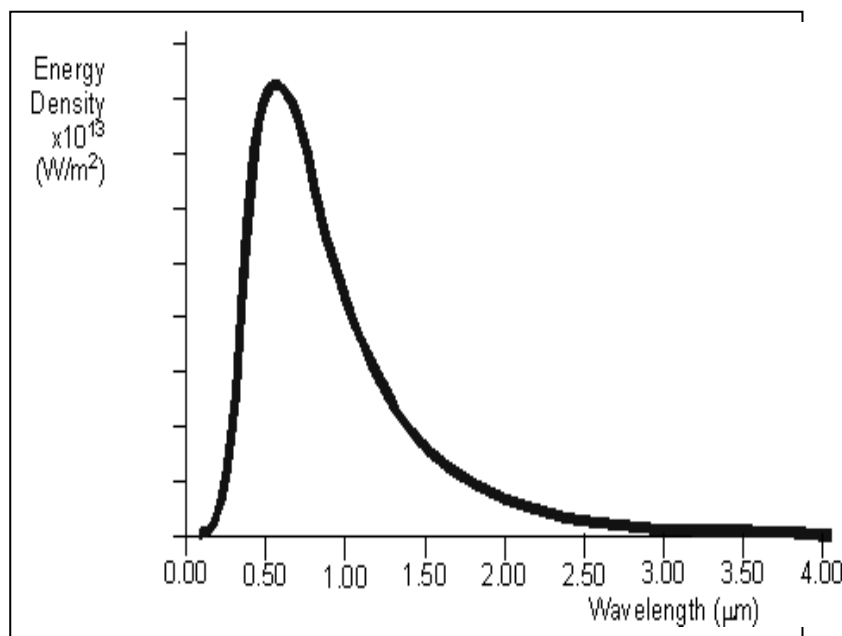


Fig. 1.1 Tipico spettro di emissione di corpo nero.



Fig. 1.2 Max Planck (Kiel 1858, Göttingen 1947) e Albert Einstein (Ulm 1879, Princeton 1955).

La soluzione al problema della spiegazione dello spettro del corpo nero, come tutti sappiamo, fu trovata da Planck nel 1900. Egli ipotizzò che l'energia dei modi normali del campo elettromagnetico nella cavità potesse assumere solo valori discreti, proporzionali al valore della frequenza di ogni modo, cioè con ovvia simbologia:

$$E_n = nh\nu \quad (1.1)$$

e successivamente utilizzò alcuni metodi di termodinamica statistica elaborati precedentemente da Boltzmann. La costante $h \sim 6.6 \times 10^{-34}$ Js (che ha, quindi le dimensioni di un'azioneⁱ) è detta costante di Planck. E' interessante osservare che la famosa formula di Rayleigh e Jeans, basata sul principio di equipartizione dell'energia, risale anch'essa al 1900! Il confronto tra le due formule, quella di Planck e quella, appunto, di Rayleigh e Jeans, conduceva a serissime difficoltà interpretative.

Altri fatti sperimentali misero in crisi la concezione classica della radiazione; tipicamente le leggi dell'effetto fotoelettrico, che, per essere spiegate, attesero l'idea che le interazioni del campo elettromagnetico con la materia fossero date per mezzo di fotoni. E' con Einstein che l'idea di quanto di luce cambia status: dalla quantizzazione dei modi normali di Planck egli passa all'idea dei quanti come "grumi" di energia. Scrive infatti Einstein nel suo lavoro del 1905 sull'effetto fotoelettrico: "...le osservazioni...



Fig. 1.3 Gilbert Lewis (Weymouth 1875, Berkeley 1946).

vengono facilmente comprese se ci si rifà all'idea che l'energia della luce sia distribuita nello spazio con discontinuità"ⁱⁱ. ...Col tempo si cominciò a dire che la radiazione elettromagnetica viene "trasportata" da quanti di energia $h\nu$ (ma è interessante notare che soltanto 26 anni dopo il lavoro di Planck, nel 1926, questi quanti ricevettero un nome: G. Lewisⁱⁱⁱ li chiamò di fotoni).

La crisi dell'entropia

Un altro fatto fondamentale, talvolta trascurato nelle presentazioni elementari, che mise in gravi difficoltà la fisica classica è la cosiddetta "crisi" dell'entropia. Ci riferiamo qui al fatto che in base all'equazione di Boltzmann, l'entropia di un sistema, composto da particelle, è data dall'equazione:

$$S = k \log \Omega(E) \quad (1.2)$$

essendo $\Omega(E)$ il volume dello spazio delle fasi di energia E "occupato" dalle particelle. Allora quando E tende al valore minimo (per esempio per un gas perfetto "classico", per il quale l'energia è solo cinetica, questo valore minimo dell'energia è zero, e corrisponde al caso in cui tutte le particelle sono ferme) il volume $\Omega(E)$ tende a zero, così che l'entropia diverge a meno infinito! Osserviamo che questi aspetti termodinamici sono sorprendentemente attuali, infatti la soluzione a questo problema fu trovata da Einstein e Bose (Fig. 3.1) che mostrarono come un gas perfetto, raffreddato, attraversi una transizione di fase che lo conduce al famoso condensato di Bose Einstein che ha una entropia nulla; tale condensato è di recente scoperta sperimentale e ancora di estrema attualità. E', questo, uno stato coerente della materia, di cui però, almeno per ora non ci occuperemo.

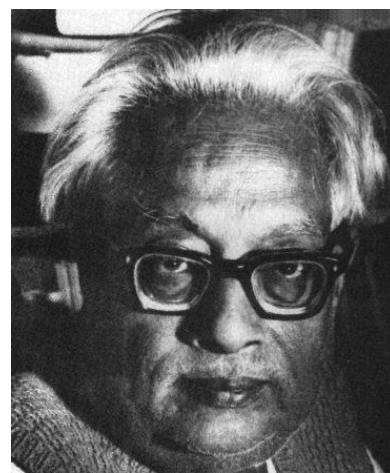


Fig. 1.4 Satyendra Nath Bose
(Calcutta 1894, Calcutta 1974).

Il problema della struttura dell'atomo

La fisica classica si rivela incapace anche di spiegare la struttura dell'atomo, in particolare gli spettri della luce emessa dagli elementi allo stato gassoso pongono problemi di difficile (se non impossibile) interpretazione all'interno della teoria classica. Vediamone brevemente il perché.

Nei primi anni del 1900 alcune proprietà degli atomi erano note: gli atomi contengono elettroni; sono normalmente stabili; emettono e assorbono radiazione elettromagnetica sotto forma di spettri discreti; sono elettricamente neutri.

Queste proprietà spinsero a chiedersi come sono distribuite le cariche negative e positive all'interno dell'atomo, in modo da poterne spiegare sia la stabilità meccanica sia quella radiativa. Le congetture principali erano due: una considerava l'atomo dotato di un nucleo positivo (per esempio il modello di Nagaoka del 1904), l'altra considerava una carica positiva uniformemente distribuita su tutto l'atomo (per esempio il modello di Thomson, sempre del 1904). I modelli a nucleo erano difficilmente sostenibili per due motivi: gli elettroni ruotanti avrebbero dovuto perdere energia emettendo onde elettromagnetiche e, quindi, precipitare sul nucleo (con semplici calcoli si può mostrare che ciò dovrebbe avvenire in un tempo dell'ordine dei 10^{-10} s e che in tale tempo l'atomo dovrebbe irraggiare un'energia dell'ordine di 1 MeV!). Inoltre non era nota alcuna fenomenologia che avesse bisogno dell'ipotesi di nucleo atomico per essere spiegata.

Il modello di Thomson

I modelli a "carica positiva distribuita" erano quindi più gettonati; in particolare lo era il modello di J. J. Thomson.

Esso si basava sull'assunto che la carica fosse distribuita "...nel modo più semplice dal punto di vista matematico."^{iv} Nel modello di Thomson gli elettroni erano disposti (in condizioni di equilibrio) ai vertici di poligoni regolari, poggiati su circonferenze, interne e concentriche ad una sfera con densità uniforme di carica positiva, in modo che le forze elettriche fossero bilanciate dalla disposizione delle cariche e dal moto circolare degli elettroni. Se l'atomo ha raggio R e la circonferenza circoscritta al poligono regolare sul quale sono disposti gli elettroni ha raggio r e contiene n elettroni di massa m che ruotano tutti con la stessa velocità angolare ω , l'analisi di Thomson conduceva alla condizione di equilibrio meccanico:

$$\frac{\omega e^2 r}{2\pi R^3} = \frac{e^2}{4r^2} S_n + mr\omega^2 \quad (1.3)$$

essendo

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cosec} \frac{i\pi}{n}. \quad (1.4)$$

Per quanto riguarda la stabilità radiativa, le leggi dell'elettromagnetismo classico impongono che una carica accelerata debba irraggiare, però Larmor^{iv} aveva già osservato che "Quando il vettore somma delle accelerazioni di n elettroni su un'orbita è costantemente nullo, non vi è radiazione o ve ne sarà molto poca e pertanto questo moto sarà permanente." Thomson riesce a dimostrare che, indicando con λ la lunghezza d'onda della luce emessa, nel caso di n elettroni, la radiazione emessa è pari a $(R/\lambda)^{2n}$ volte quella emessa da una singola particella (per es. per $n=10$ e λ nel visibile tale fattore vale circa 10^{-60} ...). Insomma Thomson riuscì a garantire la stabilità dell'atomo. Per capire come mai il modello fornisca alcune indicazioni quantitativamente corrette consideriamo il caso più semplice: quello dell'atomo di idrogeno, nel quale un unico elettrone è disposto nel centro di una carica positiva e uniformemente distribuita su una sfera di raggio r_0 , raggio complessivo dell'atomo. Se spostiamo l'elettrone di un tratto $x < r_0$ dal centro dell'atomo, possiamo scrivere la seguente equazione che ne determinerà il moto (con ovvia simbologia):

$$m_e \ddot{x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 x}{r_0^3}, \quad (1.5)$$

perciò l'elettrone si muoverà di moto armonico con pulsazione:

$$\omega^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr_0^3}. \quad (1.6)$$

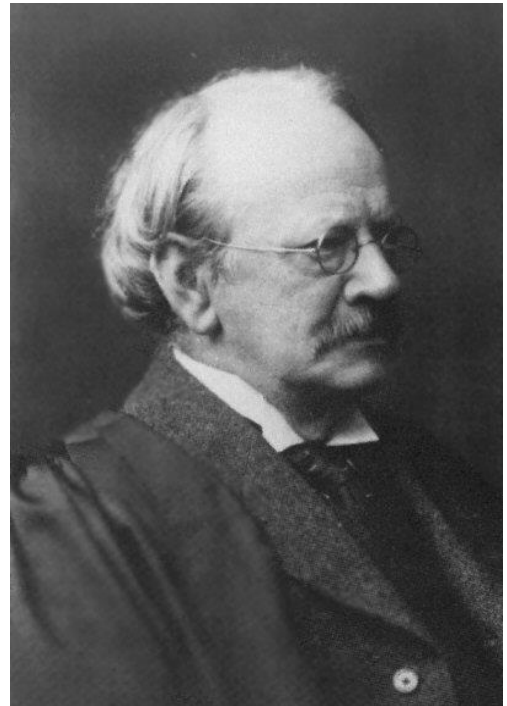


Fig. 1.5 Joseph John Thomson (Cheetam 1856, Cambridge 1940).

Così che abbiamo trovato un legame tra la frequenza di oscillazione (che è uguale a quella della radiazione elettromagnetica emessa) e le dimensioni dell'atomo. Per frequenze dell'ordine di quelle del visibile troviamo dimensioni dell'ordine di 10^{-10} m, proprio come “deve” essere!

Osserviamo che il modello di Thomson è noto come modello “*plum pudding*”, in Italia come modello a “panettone”; riteniamo che questa terminologia, sebbene certamente evocativa, sia abbastanza fuorviante; infatti il modello di Thomson ha una struttura matematica molto precisa e per nulla casuale e riesce a rendere conto di alcuni fatti fisici importanti. L'idea del panettone con l'uvetta a rappresentare gli elettroni disposti casualmente è certamente molto distante da questo modello.

L'atomo di Rutherford

Dopo alcuni anni il modello di Thomson fu però abbandonato, a causa di evidenti prove sperimentali a favore di una struttura nucleare dell'atomo.

Infatti in una serie di famosissimi esperimenti sullo *scattering* di particelle alfa da parte di *target* sottili, Geiger e Marsden, mostrarono che il modello di Thomson non poteva spiegare i dati osservati. Nel 1911 nacque così il famoso modello di Rutherford (che interpreta i dati sperimentali interamente in termini di meccanica classica) sul quale, visto la sua grande notorietà, non spenderemo altre parole, se non per osservare che Rutherford non si preoccupò della stabilità radiativa del modello; infatti riportiamo qui le sue parole: “La questione della stabilità dell'atomo proposto non ha bisogno di essere considerata a questo stadio, perché essa dipenderà ovviamente dalla struttura minuta dell'atomo, e dal moto delle sue parti cariche costitutive”^v. In altre parole: non importa se il modello di Thomson ha tanti pregi e quello nucleare non sta i piedi per motivi teorici: l'atomo ha un nucleo. E così il modello di Thomson viene spazzato via dagli esperimenti di Geiger e Marsden e dall'interpretazione datane da Rutherford che, infatti, nel suo articolo si dilunga a spiegare che il modello di Thomson non può spiegare i dati sperimentali.

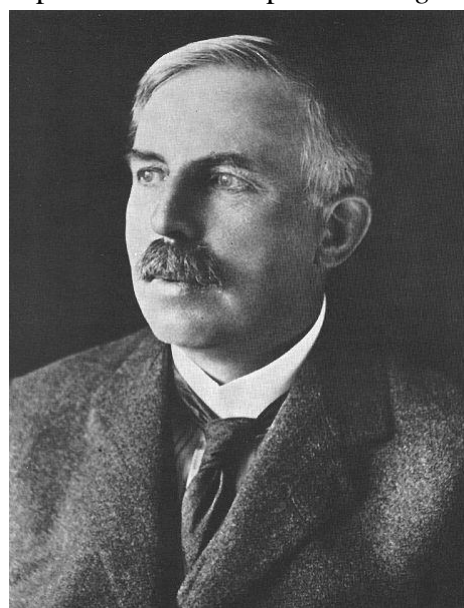


Fig. 1.6 Ernest Rutherford
(Brightwater 1871, Cambridge 1937).

Il modello atomico di Bohr

Un primo passo in avanti per spiegare “la struttura minuta dell'atomo” fu fatto da Bohr che sviluppò il suo famoso modello. Esso è basato su quattro postulati:

1. Un elettrone in un atomo si muove su orbite circolari attorno al nucleo, sotto l'influenza dell'attrazione colombiana, obbedendo alle leggi della meccanica classica.
2. Al contrario di quanto avviene in meccanica classica non tutte le orbite sono possibili. Un elettrone può muoversi solo su orbite per le quali il momento angolare L sia un multiplo intero di \hbar . Tali orbite sono dette orbite o stati stazionari.
3. Un elettrone che si muove su un'orbita permessa non irraggia energia elettromagnetica.
4. L'atomo emette radiazione elettromagnetica solo quando l'elettrone passa da un'orbita con energia totale E_i ad un'orbita con energia totale E_f . In tal caso la frequenza della radiazione emessa è:

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h} \quad (1.7)$$

A commento di queste ipotesi, dopo aver osservato le difficoltà della fisica classica a spiegare la stabilità di un atomo nucleare, Bohr sottolinea: “Il risultato della discussione di questi problemi sembra essere il riconoscimento generale dell’inadeguatezza dell’elettrodinamica classica nel descrivere il comportamento di sistemi di dimensioni atomiche. Qualunque modifica ci possa essere nelle leggi del moto degli elettroni, sembra necessario introdurre nelle leggi in questione una quantità estranea all’elettrodinamica classica, cioè la costante di Planck... [Si assume] che l’equilibrio dinamico del sistema negli stati stazionari possa essere discusso con l’aiuto della meccanica ordinaria, mentre la transizione dei sistemi tra stati stazionari diversi non può essere trattata sulle stesse basi.”^{vi}

Con queste ipotesi Bohr ricavò subito i valori r_n ed E_n dei raggi e delle energie associati alle orbite permesse. Essi sono dati da:

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \frac{m}{\mu} a_B; \quad E_n = -Z^2 \frac{Rhc}{n^2} \quad (1.8)$$

dove a_B è il cosiddetto raggio di Bohr ed R_H è la costante di Rydberg:

$$a_B \equiv \frac{\hbar^2}{me^2}; \quad R_H \equiv \frac{\mu e^4}{4\pi\hbar^3 c} \quad (1.9)$$

mentre μ è la massa ridotta del sistema elettrone-nucleo.

Le giustificazioni ai postulati di Bohr possono essere trovate solo confrontando le predizioni che si ricavano dal modello con i risultati sperimentali. I successi furono molti. Tale modello riesce a ricondurre a grandezze note la costante di Rydberg^{vii} per l’idrogeno (già precedentemente determinata sperimentalmente dalla misura dei termini spettroscopici), a determinare il valore corretto dell’energia di ionizzazione dell’idrogeno, a determinare correttamente le dimensioni atomiche (basta porre $n=1$ e $Z=1$ nella formula dei raggi permessi per ottenere che le dimensioni dell’atomo di idrogeno nello stato fondamentale), a spiegare la serie di Balmer e, soprattutto, a predire le serie (non ancora osservate sperimentalmente all’epoca della sua formulazione) di Lyman, Brackett e Pfund. Si riuscì anche a predire lo spettro dell’elio.

Non solo: la dipendenza dalla massa del nucleo (contenuta nell’espressione della massa ridotta) permette di spiegare l’effetto isotopico e cioè la piccola differenza che si nota negli spettri di isotopi differenti dello stesso elemento. Per di più, nel 1914, Franck e Hertz diedero una conferma sperimentale della validità dell’idea di Bohr della discretizzazione dei livelli energetici negli atomi e della regola per la determinazione della frequenza delle righe emesse dagli atomi eccitati. Tutto ciò rese il modello di Bohr sempre più popolare e universalmente noto.

Molte questioni rimasero, però, non chiarite. Il modello è, infatti, incompleto, in quanto si applica solo ad atomi idrogenoidi (cioè con un solo elettrone); inoltre, anche per tali atomi, pur fornendo le corrette frequenze delle righe spettrali, il modello di Bohr non fornisce alcun modo per calcolarne l’intensità (e ciò è collegato al fatto che non riesce a dare risposta alle domande riguardanti la probabilità che un elettrone salti da un’orbita all’altra). Inoltre una analisi spettroscopica raffinata mostra che la maggior parte delle righe spettrali risulta costituita da più componenti vicine, presenta, cioè, una struttura fine che il modello non è in grado di spiegare. Il modello di Bohr fornisce, inoltre, una stima errata del momento angolare L dell’elettrone nello stato fondamentale (cioè quello di minima energia) dell’atomo di idrogeno; infatti, per il secondo postulato, L dovrebbe valere \hbar , mentre gli esperimenti forniscono chiaramente $L=0$. Pertanto, contrariamente all’ipotesi di Bohr, l’elettrone nello stato fondamentale non può ruotare. Inoltre il modello “costruisce” un atomo bidimensionale!... Per di più i postulati di Bohr non possiedono una convincente motivazione né teorica né empirica. “Bohr però era perfettamente conscio di tutte le sue gravi imperfezioni e del

fatto che essa [la sua teoria dell'atomo] poteva essere solo una stadio temporaneo; e lo ripeteva ad ogni occasione”^{viii}.

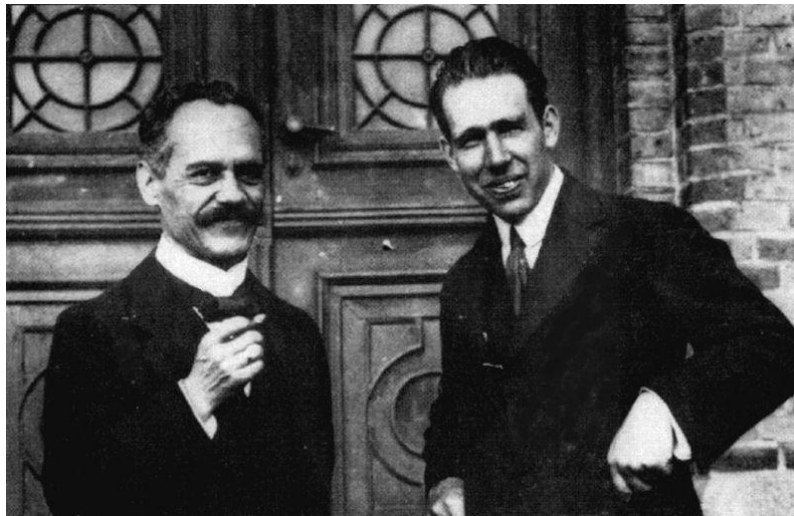


Fig. 1.7 Arnold Sommerfeld (Königsberg 1868, Monaco 1951) e Niels Bohr (Copenaghen 1885, Copenaghen 1962).

La quantizzazione alla Sommerfeld

Una generalizzazione delle idee di Bohr fu dovuta a Ehrenfest (1913) e successivamente a Sommerfeld (1915) che espresse regole generali che permettevano di “quantizzare” i moti centrali periodici (fondamentalmente imponevano che l’azione del corpo in moto fosse multipla della costante d’azione h). Tali regole, applicate ad un modello di atomo planetario, consentivano per l’elettrone anche orbite ellittiche e permettevano di spiegare la struttura fina delle righe spettrali. Per capire in un caso molto semplice come si applicano le condizioni di Sommerfeld, consideriamo una particella che si muova di moto armonico. In un caso così semplice le condizioni si scrivono (indicando con p il momento coniugato alla posizione q):

$$\int_{\text{periodo}} p dq = nh. \quad (1.10)$$

Ora, essendo

$$p = m\dot{q}; \quad dq = \dot{q} dt \quad (1.11)$$

si ha

$$\int_{\text{periodo}} p dq = \int_{T=\frac{2\pi}{\omega}} m\dot{q}^2 dt = \frac{2\pi}{\omega} E \quad (1.12)$$

(infatti, per l’oscillatore armonico, l’energia cinetica mediata su un periodo, è la metà dell’energia totale E ; siccome noi stiamo integrando su un periodo proprio il doppio dell’energia cinetica...il risultato non può che essere l’energia totale moltiplicata per il periodo). Da cui discende:

$$E_n = n\hbar\omega \quad (1.13)$$

Come vedremo, questa soluzione non è completamente corretta, infatti ci dà la giusta equispaziatura dei livelli energetici ma non ci fornisce la cosiddetta “energia di punto zero” dell’oscillatore armonico, come si otterrà dalla meccanica quantistica.

Senza entrare ora in altri dettagli tecnici, tutto sommato inutili per i nostri scopi, osserviamo, però, un fatto importante: Sommerfeld estese la teoria di Bohr prendendo in considerazione la relatività speciale e permettendo alle orbite di assumere anche forme diverse da quella circolare. Ottenne per l’elettrone la possibilità di orbite ellittiche che precedevano attorno al nucleo. Con la quantizzazione alla Sommerfeld i numeri quantici aumentano (non c’è più solo n) e compare anche per la prima volta una “strana” quantizzazione spaziale che impone che l’angolo tra il piano dell’orbita dell’elettrone e una direzione fisicamente privilegiata (per esempio per l’applicazione di un campo magnetico uniforme) sia quantizzato. Dopo alcuni anni di sviluppo il modello atomico di Sommerfeld vantava molti successi: spiegava lo spettro e la struttura fine dell’atomo di idrogeno, gli esperimenti di Stern e Gerlach^{ix}, l’effetto Stark, l’effetto Zeeman normale, la predizione dell’esistenza dell’elemento afnio (numero atomico 72), la spiegazione del legame ionico e la spiegazione della legge di Moseley (riguardante lo spettro dei raggi X)^x. Rimanevano, però, anche molti dati sperimentali non spiegabili, per esempio l’effetto Zeeman anomalo, l’effetto Paschen-Back, l’effetto Ramsauer, gli spettri molecolari, il legame covalente ecc^{xi}.

L’effetto Compton

Dobbiamo aspettare il 1923 per avere la prova sperimentale che il quanto di energia elettromagnetica “trasporta” anche quantità di moto (questo potrebbe spiegare perché si è dovuto aspettare il fino al 1926 per dargli un nome). Come scrive, infatti, Compton nell’articolo che spiega l’effetto che da lui prende il nome: “...essa implica...l’ipotesi che i quanti di radiazione provengono da direzioni definite e sono deviati su direzioni definite. Il supporto sperimentale della teoria indica, in maniera molto convincente, che un quanto di radiazione porta con sé una quantità di moto dotata di direzione, così come porta con sé dell’energia”^{xii}. E’ interessante notare che l’effetto Compton è stato scoperto utilizzando come radiazione dei raggi X; negli anni successivi al 1923 l’esistenza dei quanti di radiazione era ancora così incerta che si studiò la possibilità dell’effetto anche per radiazioni con frequenza molto maggiore di quella degli X utilizzati da Compton; (ovviamente l’esito fu positivo e così ai fotoni, di qualunque frequenza, fu attribuita, oltre all’energia, anche una quantità di moto). Nel 1925 un ulteriore esperimento condotto da Compton e Simon andò a verificare la contemporanea presenza del fotone diffuso e dell’elettrone di rinculo rivelati agli angoli “giusti” secondo la teoria degli urti: la descrizione quantistica della radiazione divenne una realtà a tutti gli effetti.

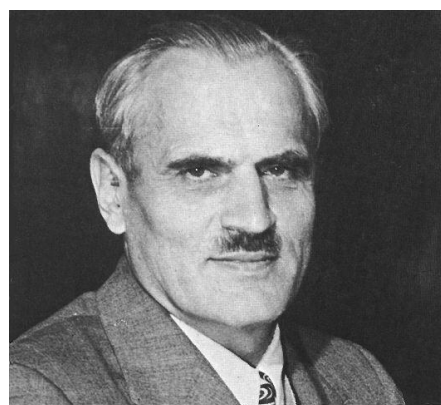


Fig. 1.8 Arthur Compton
(Wooster 1892, Berkeley 1962).

La statistica di Bose-Einstein

Era ormai il momento giusto perché la derivazione di Planck dello spettro del corpo nero, basata su calcoli che mescolavano, senza solide basi, aspetti classici con aspetti quantistici, fosse rivista e fondata su considerazioni più solide. Ciò accade nel 1924 con il lavoro di Bose e successivamente con quello di Einstein. Per quanto ci riguarda osserviamo solo che nell’articolo di Bose^{xiii} si assumeva che i quanti di luce fossero indistinguibili e che, quindi, si dovesse utilizzare per essi una statistica diversa da quella di Boltzmann, pensata per particelle classiche e, perciò distinguibili; Bose assumeva, inoltre, che il numero totale di quanti non fosse nemmeno vincolato a rimanere costante a causa di un qualche principio di conservazione.

Come è chiaro, in tutta questa modellizzazione l'idea di particella (ma con Bose già come è strana questa particella...) prevale su quella di campo.

Le onde di De Broglie

Un cambiamento di prospettiva si ebbe con de Broglie (1924) che propose una soluzione per limitare la dicotomia tra particelle e campi.

L'analisi di De Broglie parte dall'osservazione che in ottica trovano posto sia l'ottica fisica sia l'ottica geometrica, come caso limite della prima, e che quest'ultima ha una grande analogia con la meccanica del punto. Così De Broglie si pone il problema di formulare un'ottica "materiale" ondulatoria dalla quale "ricavare" la meccanica delle particelle in maniera analoga a quanto si fa per passare dall'ottica ondulatoria all'ottica materiale. Per risolvere il problema De Broglie parte dalla relazione di Einstein per i fotoni, cioè da $E = \hbar\omega$ e propone la sua estensione a qualsiasi particella materiale che si propaghi liberamente. Immaginiamo, per semplicità, che una particella sia in qualche modo descritta da un'onda piana la cui fase nel punto \underline{x} e al tempo t è



Fig. 1.9 Louis De Broglie
(Dieppe 1892, Louveciennes 1987).

$$\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t . \quad (1.14)$$

Se imponiamo che la fase sia invariante per trasformazioni di Lorentz (osserviamo che la fase sopra scritta ha proprio la forma di un prodotto scalare con la metrica indefinita...), allora il vettore (\underline{k}, ω) dovrà trasformarsi come il quadrivettore (\underline{x}, t) o, il che è la stessa cosa, come il quadrivettore (\underline{p}, E) . Tenendo conto che la relazione $E = \hbar\omega$, ci fornisce la costante che lega E ad ω , non possiamo che imporre che la stessa costante di proporzionalità leghi anche l'impulso al numero d'onda; poniamo quindi:

$$\underline{k} = \frac{\underline{p}}{\hbar}; \quad \omega = \frac{E}{\hbar} . \quad (1.15)$$

Nel caso più realistico che, per descrivere la particella, si debba considerare un pacchetto d'onde (invece di una semplice onda piana che ha poco significato fisico), si trova che la velocità di gruppo $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ coincide con la velocità della particella, e questo, in un certo senso, rafforza la bontà della nostra associazione tra onda e particella. Per esempio nel caso di un elettrone che si muova a velocità sufficientemente bassa, con ovvia simbologia, si avrà:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial \left(\frac{p^2}{2m} \right)}{\partial p} = \frac{p}{m} = \mathbf{v} . \quad (1.16)$$

Come è ben noto, con tale ipotesi e con l'ulteriore assunzione che le orbite stazionarie di Bohr siano quelle che contengono un numero intero di lunghezze d'onda elettroniche, De Broglie poté ricavare in altro modo le condizioni di quantizzazione delle orbite ottenute da Bohr: le orbite stazionarie diventano così quelle che "contengono" onde stazionarie (e questo è davvero un primo passo verso la comprensione della struttura dell'atomo).

La meccanica delle matrici

Nel 1925 la crisi della fisica classica comincia a trovare una soluzione consistente e coerente. Heisenberg, allievo di Bohr, capisce che visualizzare l'atomo come un sistema planetario rappresenta più un ostacolo che un vantaggio. Decide, quindi, di concentrarsi solo su quantità fisiche che possano essere concretamente misurate. Scrive infatti: "Il presente lavoro vuole stabilire una base per la meccanica quantistica teorica che sia fondata esclusivamente su relazioni tra quantità che siano osservabili in linea di principio." Formula, così, con importanti contributi anche da parte di Born, Jordan e Pauli, uno schema matematico che sarà detto meccanica delle matrici. Le osservabili principali riguardanti gli atomi, e da cui Heisenberg parte, sono le frequenze delle righe spettrali emesse.

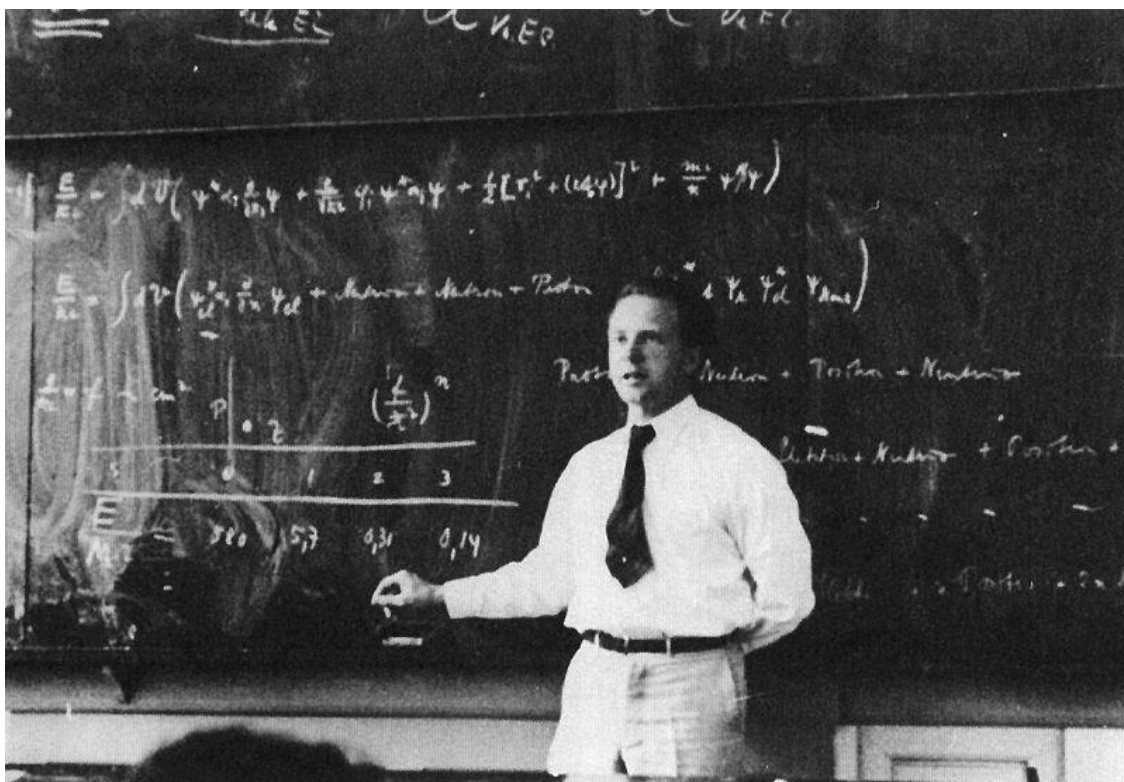


Fig. 1.10 Werner Heisenberg (Würzburg 1901, Monaco 1976).

Accenniamo solo al tipo di ragionamento operato da Heisenberg. Egli sapeva che le frequenze potevano essere ottenute dal principio di combinazione di Ritz^{xiv} ed espresse mediante le serie di termini spettrali T_i nel seguente modo:

$$\nu_{nm} = T_n - T_m \quad (1.17)$$

Si poteva, quindi, rileggere l'insieme di queste frequenze come costituenti una matrice quadrata infinita. Sempre dalla regola di Ritz si ricava poi immediatamente che vale la relazione:

$$v_{nk} + v_{km} = v_{nm} . \quad (1.18)$$

Osservando la posizione dei pedici, notiamo che la regola di somma precedente è analoga alla regola di moltiplicazione delle matrici. Possiamo, allora, pensare i v_{nk} come esponenti di opportune grandezze, così che la regola precedente si trasformi facilmente nella regola di moltiplicazione di queste grandezze, che possiamo chiamare matrici “frequenza”; e così via di seguito verso la “meccanica delle matrici”...

Il principio di Pauli

Rimaneva, però, aperta ancora una questione importante: per spiegare la tavola periodica degli elementi era necessario ipotizzare che gli elettroni degli atomi non occupassero tutti lo stesso livello di energia, quello più basso. Per risolvere questo problema Pauli, nel 1925, enunciò, il suo famoso principio di esclusione, attribuendo all’elettrone una duplicità non descrivibile classicamente e che poco più tardi fu collegata allo *spin*.

L’equazione di Schrödinger

Nel 1926 Schrödinger, in una serie di sei lavori, pone le basi di quella che è adesso chiamata meccanica ondulatoria (e che, in breve tempo, diventerà la meccanica quantistica non relativistica).

Seguendo Schrödinger, data una funzione ψ (chiamata funzione d’onda) capace di determinare le proprietà del sistema (fatto di una o di poche particelle), l’evoluzione di ψ è data dall’equazione:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right) \psi . \quad (1.19)$$

L’importanza della nuova teoria divenne subito evidente anche perché si riuscì a dimostrare che la meccanica ondulatoria e la meccanica delle matrici erano teorie equivalenti. Rimaneva, però, un problema di interpretazione; infatti come scriveva Born: “Nelle collisioni non si ha a che fare con misteriosi campi d’onda ma, esclusivamente, con sistemi di particelle materiali...”^{xv} e da qui egli parte per sviluppare l’interpretazione probabilistica che prende il suo nome (e che consideriamo nota)^{xvi}.



Fig. 1.11 Wolfgang Pauli (Vienna 1900, Vienna 1961).

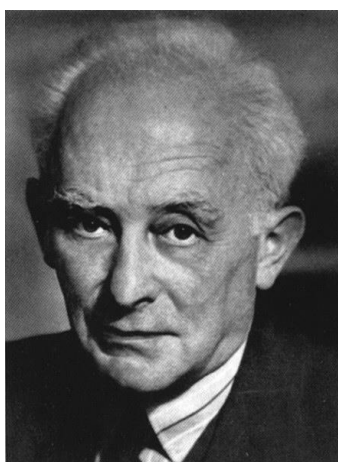


Fig. 1.12 Max Born (Breslau 1882, Göttingen 1970).
e Erwin Schrödinger (Vienna 1887, Vienna 1961).

Lo spin

Che Schrödinger abbia sviluppato un'equazione non relativistica può sembrare strano, infatti già De Broglie aveva ricavato le sue relazioni richiedendo la Lorentz invarianza della fase; per di più i fotoni, essendo quanti di luce, hanno massa zero e non ammettono una descrizione non relativistica e, quindi, non sono descrivibili dall'equazione di Schrödinger. Il punto è che Schrödinger era giunto a considerare una equazione d'onda relativistica ma, i calcoli da lui effettuati utilizzando tale equazione fornivano dei risultati non completamente corretti per quanto riguarda la struttura fina dell'atomo di idrogeno e, perciò, egli abbandonò tale equazione. Il motivo della discrepanza tra calcoli e valori sperimentali era dovuto, come riconobbe lo stesso Schrödinger, al fatto che egli aveva trascurato lo *spin* dell'elettrone, cioè un momento angolare intrinseco del valore di $\hbar/2$ proposto da Uhlenbeck e Goudsmit l'anno prima (1925), e già ipotizzato da Compton nel 1921^{xvii} per spiegare l'effetto Zeeman anomalo (di cui qui non ci occuperemo).

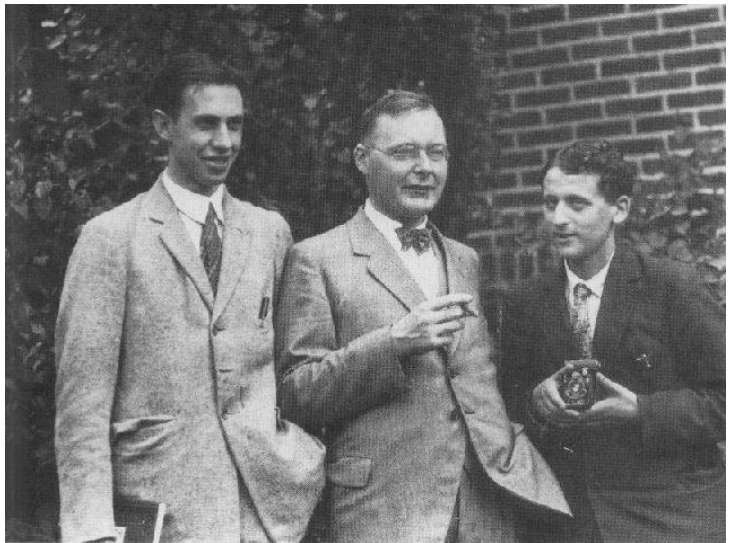


Fig. 1.13 A sinistra: George Uhlenbeck (Batavia 1900, Boulder 1988).

A destra: Samuel Goudsmit (L'Aia 1902, Reno 1978).
Al centro: J Franck (Hamburg 1882, Göttingen 1964).

L'esperimento di Davisson e Germer

Nel 1927, quattro anni dopo l'originaria proposta di De Broglie e un anno dopo che Schrödinger aveva posto le basi della meccanica ondulatoria, Davisson e Germer mostrarono direttamente e sperimentalmente gli effetti ondulatori connessi alle particelle materiali in un esperimento di interferenza prodotto dallo *scattering* di elettroni da cristalli^{xviii}.

Il principio di indeterminazione

In questa continua evoluzione delle teorie era molto avvertito il problema della visualizzazione di ciò che "realmente accade" a livello microscopico. E' per questo che Heisenberg, nel 1927, pubblica il lavoro dal titolo "Il contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica quantiche"^{xix} nel quale, partendo dall'idea che "per seguire il comportamento quantomeccanico di un oggetto, ...occorre conoscere le sue interazioni con campi e con altri oggetti", egli giunge a formulare il principio di indeterminazione. Heisenberg utilizza, fra l'altro, il famoso esempio del microscopio



Fig. 1.14 Clinton Joseph Davisson (Bloomington 1881, Charlottesville 1958) e Lester Germer (Chicago 1896, Gardiner 1971).

a raggi γ che, in poche parole è il seguente. Consideriamo un elettrone di cui si vuole conoscere la posizione, per questo possiamo illuminarlo e guardarlo al microscopio. La sua posizione sarà conosciuta con precisione tanto maggiore quanto minore sarà la lunghezza d'onda della luce utilizzata; ma, allora, al diminuire della lunghezza d'onda, l'elettrone sarà colpito da un fotone di quantità di moto sempre più alta, che modificherà l'impulso dell'elettrone di una quantità imprevedibile e che è potenzialmente sempre più grande all'aumentare della frequenza del "fotone" stesso. Morale: al diminuire dell'incertezza con la quale vogliamo conoscere la posizione dell'elettrone aumenta l'incertezza con la quale conosciamo l'impulso; con un po' di semplici calcoli si arriva, così, alla famosa relazione $\Delta x \Delta p \sim \hbar$.

L'approssimazione semiclassica per descrivere l'interazione col campo elettromagnetico

Come abbiamo detto la meccanica quantistica di Schrödinger non è in grado di descrivere i fotoni e, così, il campo elettromagnetico rimane ancora descritto dalle equazioni di Maxwell. La sua natura quantistica è introdotta nella teoria "a mano", imponendo la relazione di Einstein per i fotoni. Nonostante fossero passati 26 anni dal modello di Planck, non si disponeva ancora di una teoria quantistica della radiazione, e questo era un punto dolente dell'intero edificio della meccanica quantistica.

In effetti con l'apparato formale sviluppato la struttura dell'atomo veniva spiegata soltanto da un punto di vista meccanico; si trovavano i giusti autovalori dell'energia di un elettrone in un campo coulombiano ma si trascurava ogni accoppiamento dell'elettrone col campo elettromagnetico perché non c'era una teoria che consentisse di farlo. Infatti il problema della stabilità radiativa dell'atomo si pone solo considerando l'accoppiamento tra cariche elettriche in moto e campo elettromagnetico; in altre parole le transizioni da un livello atomico eccitato ad un altro non sono possibili se non c'è accoppiamento tra elettroni e campo elettromagnetico e, senza accoppiamento l'elettrone non può che rimanere sul livello energetico in cui è, senza irradiare. Insomma in meccanica quantistica non siamo ancora in grado di spiegare le righe spettrali in modo soddisfacente. L'unico modo di farlo è, infatti, quello di utilizzare una approssimazione semiclassica nella quale il campo elettromagnetico è trattato come un campo classico e l'azione sugli elettroni dell'atomo viene vista come una forza esterna^{xx}. L'esistenza dei quanti di luce è inserita, come abbiamo detto prima, "a mano". Da questo punto di vista non siamo in una buona situazione, l'idea di quanto è nata proprio per spiegare alcune fenomenologie riguardanti il campo elettromagnetico ed ora sono proprio i quanti del campo elettromagnetico quelli per i quali non abbiamo una teoria adeguata!



Fig. 1.15 James Clerk Maxwell
(Edimburgo 1831, Cambridge 1879).

Quantizzazione del campo elettromagnetico

Per superare i limiti teorici appena visti, e proprio negli stessi anni nei quali veniva sviluppata la meccanica quantistica si cercò di costruire una teoria quantistica del campo elettromagnetico. Ciò avvenne a cominciare dal 1926 con Heisenberg e negli anni 1927-1928 per opera soprattutto di Jordan, Pauli e Wigner. Essi ebbero l'idea di scrivere lo sviluppo in serie di Fourier del quadripotenziale descrivente il campo elettromagnetico all'interno di una cavità (per esempio una scatola).



Fig. 1.16 Pascual Jordan (Hannover 1902, Hannover 1980) e Eugene Wigner (Budapest 1902, Princeton 1995).

Tenendo conto che tale sviluppo deve essere soluzione dell'equazione delle onde elettromagnetiche si trova che, allora, per ciascun modo normale, i coefficienti dello sviluppo devono soddisfare l'equazione dell'oscillatore armonico:

$$\ddot{A}_{\underline{k}}(t) + \omega_{\underline{k}}^2 A_{\underline{k}}(t) = 0 \quad (1.20)$$

A questo punto l'ulteriore idea per quantizzare il campo fu quella di fare entrare in gioco il formalismo, già conosciuto della meccanica quantistica, che permetteva la quantizzazione dell'oscillatore armonico e che, una volta applicato, fornisce autovalori discreti ed equidistanti per la sua energia. A questo punto siamo pronti per reinterpretare quanto trovato: lo stato corrispondente all'autovalore n -esimo del modo \underline{k} (e pulsazione ω) viene interpretato come stato ad n fotoni di energia $\hbar\omega$. I fotoni sono, quindi, direttamente collegati agli stati del campo. Restava ancora molta strada da fare, si trattava, infatti, di introdurre gli stati di polarizzazione, ecc. ecc. ma rimane il fatto che il primo passo fondamentale che porterà alla teoria quantistica dei campi era stato compiuto.

Equazioni d'onda relativistiche

Affrontiamo, ora, il processo che ha portato gradualmente a costruire la teoria quantistica dei campi materiali. Infatti anche per le particelle materiali la teoria di Schrödinger non è sufficiente e richiede di essere riformulata per diventare una teoria relativistica. E' interessante notare che proprio negli anni in cui si sta sviluppando la meccanica quantistica si stanno anche mettendo le basi per il suo superamento e proprio ad opera di coloro che la stavano sviluppando e che la reputavano evidentemente insufficiente.

Torniamo, quindi, al problema di trattare in modo relativistico gli aspetti ondulatori delle particelle. Klein e Gordon (ma anche Fock e come abbiamo detto anche Schrödinger) nel 1926 giunsero all'equazione relativistica (detta equazione di Klein-Gordon):

$$\left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + e\phi \right)^2 - c^2 \left(-i\hbar \nabla + \frac{e\mathbf{A}}{c} \right)^2 - m^2 c^4 \right] \psi(\underline{x}, t) = 0 \quad (1.21)$$

essendo φ e \underline{A} rispettivamente i potenziali scalare e vettore del campo elettromagnetico in cui si muove la particella materiale di carica e e massa m . Si trattava ora di interpretare tale equazione. La cosa non era affatto facile, infatti l'interpretazione dell'equazione di Schrödinger era basata sul fatto che le due quantità

$$\begin{aligned}\rho &\equiv |\psi|^2 \\ \underline{j} &\equiv -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)\end{aligned}\quad (1.22)$$

soddisfacevano l'equazione di continuità

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \underline{j} = 0 \quad (1.23)$$

così che l'integrale su tutto lo spazio di $|\psi|^2$ risultava indipendente dal tempo e perciò $|\psi|^2$ si poteva interpretare come densità di probabilità, così da arrivare all'interpretazione di Born. D'altra parte, le uniche due quantità costruibili da soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon e soddisfacenti un'equazione di continuità sono date da:

$$\begin{aligned}\rho &\equiv k \operatorname{Im} \psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie\varphi}{\hbar} \right) \psi \\ \underline{j} &\equiv kc^2 \operatorname{Im} \psi^* \left(\underline{\nabla} - \frac{ie\underline{A}}{\hbar} \right) \psi\end{aligned}\quad (1.24)$$

dove k è una costante arbitraria. Si capisce, però, che non è possibile interpretare ρ come densità di probabilità, infatti essa può diventare anche negativa^{xxi}. Dirac comprese che il motivo di questo sta nel fatto che nella definizione di ρ compare la derivata rispetto al tempo, e questo succede perché l'equazione di Klein-Gordon è un'equazione alle derivate seconde (mentre l'equazione di Schrödinger è un'equazione alla derivata prima rispetto al tempo).

Nel 1928 Dirac trovò il modo di superare questo problema ottenendo un'equazione relativistica contenente solo derivate prime rispetto allo spazio e al tempo ma, iterando la quale, si arriva all'equazione di Klein-Gordon in assenza di campi esterni (cioè senza i potenziali elettromagnetici). Non staremo qui a delineare il ragionamento di Dirac ma scriveremo direttamente la sua equazione (con la solita convenzione di somma sugli indici ripetuti):

$$\left(\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + mc^2 \right) \psi = 0 \quad (1.25)$$

essendo le γ^μ delle opportune matrici 4x4. L'equazione precedente rappresenta, secondo Dirac, un elettrone relativistico libero. In presenza del campo elettromagnetico l'equazione contiene dei termini in più, per la presenza dei potenziali scalare e vettore. Iterando tale equazione otteniamo, ora, un'equazione che è uguale all'equazione di Klein-Gordon con potenziali elettromagnetici ma, in più, contiene due termini, uno dei quali rappresenta l'interazione di un momento magnetico intrinseco dell'elettrone col campo magnetico esterno. Questo è un risultato eccezionale perché significa che Dirac ottiene “automaticamente” la descrizione di un elettrone con *spin*. Lo *spin* non viene più aggiunto “a mano”, diventa una conseguenza automatica dell'aver inglobato la relatività nell'equazione d'onda. Non solo: i calcoli dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno utilizzando

l'equazione di Dirac conducono a risultati corretti per la struttura fine delle righe spettrali. Inoltre, per le soluzioni dell'equazione di Dirac, si può scrivere un'equazione di continuità con $\rho=|\psi|^2$ esattamente come nel caso di Schrödinger e con la stessa interpretazione fisica di densità di probabilità (l'equazione di Dirac era stata scritta proprio per questo...).

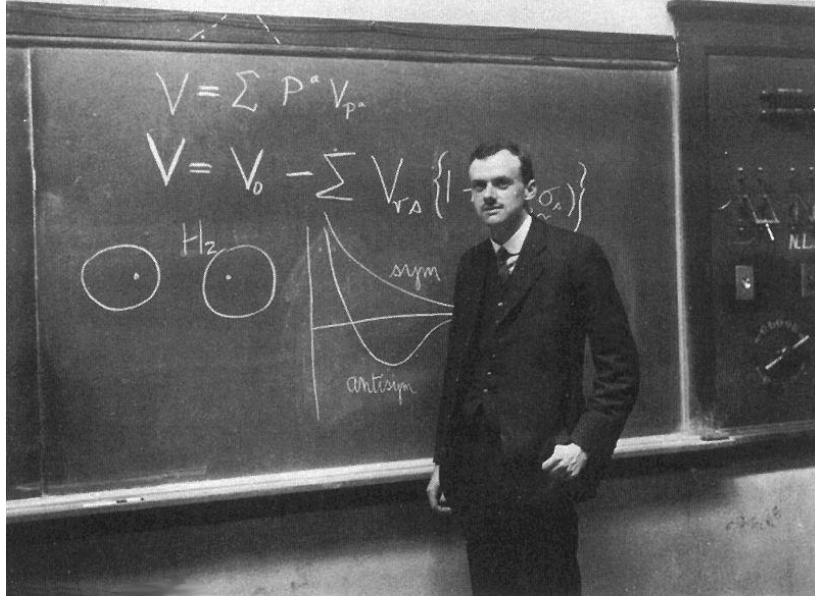


Fig. 1.17 Paul, Audrien Maurice Dirac (Bristol 1902, Tallahassee 1984).

Nasceva, però, un problema: per ogni momento fissato momento \underline{p} , l'equazione di Dirac ha ben quattro soluzioni in onda piana:

$$\psi \propto e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p} \cdot \underline{x} - Et)} . \quad (1.26)$$

Due soluzioni hanno energia positiva:

$$E = \sqrt{\underline{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (1.27)$$

(una per ogni stato di *spin* $\pm \hbar/2$ dell'elettrone).

Altre due hanno energia negativa:

$$E = -\sqrt{\underline{p}^2 c^2 + m^2 c^4} . \quad (1.28)$$

Ovviamente ciò accade anche per l'equazione di Klein-Gordon. Certamente, anche in fisica non quantistica da

$$E^2 = \underline{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.29)$$

si ricavano due soluzioni. Esse, però, sono separate fra loro da un *gap* del valore di $2mc^2$ e ciò significa che le due soluzioni non si possono “connettere” con scambi continui di energia; e perciò le soluzioni di energia negativa si possono trascurare in fisica non quantistica^{xxii}. Invece, nel caso quantistico considerato da Dirac, l'interazione col campo elettromagnetico poteva provocare la caduta di un elettrone con energia positiva in uno stato con energia negativa e l'emissione di due

fotoni! La situazione può essere riassunta come segue: con l'equazione di Klein-Gordon si hanno probabilità negative ed energie negative, con l'equazione di Dirac le probabilità diventano positive ma si hanno ancora energie negative.

Il mare di Dirac

Per un elettrone di Dirac libero i livelli di energia positiva e negativa sono simmetrici rispetto allo zero. Per spiegare il fatto che in generale gli elettroni non cadano tutti in stati di energia negativa Dirac ipotizzò, allora, che gli stati di energia negativa fossero tutti occupati (per capire questo c'è bisogno di ricordare il principio di Pauli). Lo stato “di vuoto” consisteva così di tutti gli stati di energia negativa già riempiti da elettroni (il cosiddetto mare di Dirac). In tal modo il “vuoto” ha energia e carica totale infinita e negativa ma, siccome noi osserviamo solo differenze finite di energia e di carica, questo non è un vero problema...(vale la pena osservare che problemi simili si avranno anche per tutte le future teorie di campo). Se un elettrone di energia negativa passa in uno stato di energia positiva (per esempio assorbendo un fotone) quello che noi osserviamo è, quindi, un normale elettrone di energia positiva più una buca nel mare di Dirac, cioè la mancanza di una particella di energia negativa e carica negativa, che si può interpretare come la presenza di una particella di energia positiva e carica positiva ... cioè di un antielettrone o positrone! Fu così che Dirac predisse l'antimateria (per la verità la cosa non fu ben chiara all'inizio, perché Dirac stesso pensava a questi antielettroni come protoni). Nel 1932, comunque, la previsione fu confermata dagli esperimenti: Anderson scoprì il positrone.

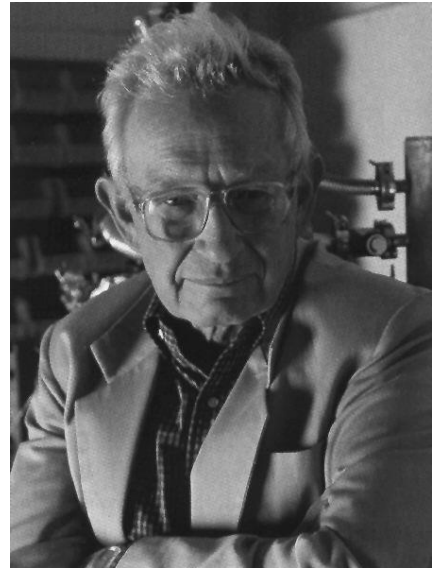


Fig. 1.18 Carl Anderson
(New York 1905,
San Marino California 1991).

Insomma la teoria di Dirac ottenne molti successi ma presentava anche alcuni punti deboli. L'equazione descrive “automaticamente” particelle di spin $\hbar/2$ ma non è in grado di descrivere particelle con diverso valore dello *spin*, per esempio particelle con *spin* zero (come le particelle alfa) o con *spin* \hbar . Inoltre l'idea del mare di Dirac può funzionare solo per particelle obbedienti al principio di Pauli (i cosiddetti fermioni), come trattare allora, in maniera relativistica, i bosoni che non vi obbediscono?

Teoria quantistica dei campi materiali

La soluzione a questi problemi fu trovata sviluppando una teoria quantistica dei campi materiali, del tutto simile alla teoria sopra abbozzata della quantizzazione del campo elettromagnetico.

L'idea fondamentale è quella di partire da un campo classico soddisfacente ad una certa equazione delle onde e di dare di questo una descrizione in termini lagrangiani; e ciò si fa scrivendo una lagrangiana dalla quale ricavare l'equazione delle onde cui soddisfa il campo. Per capirne il meccanismo con un esempio, torniamo al caso semplice del campo elettromagnetico già trattato e riguardiamolo con qualche maggiore dettaglio.

Ponendo per semplicità $c=1$, la propagazione del campo elettromagnetico lungo la direzione x è governata dall'equazione:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0 \quad (1.30)$$

Dove φ è una delle quattro componenti del quadripotenziale del campo (è interessante notare che in teoria quantistica dei campi, come già accade nell'equazione di Schrödinger e in quella di Dirac, il campo elettromagnetico è scritto in termini dei suoi potenziali, e questo fatto dà, in un certo senso una maggiore importanza ai potenziali, che non sono più meri strumenti di calcolo, piuttosto che ai campi elettrico e magnetico).

Questa equazione si può ottenere con un procedimento standard a partire dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (1.31)$$

per mezzo delle equazioni di Lagrange (monodimensionali):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0. \quad (1.32)$$

In meccanica dei sistemi puntiformi, nella quale la dinamica è espressa per mezzo delle posizioni q e dei loro momenti coniugati:

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad (1.33)$$

si definisce una hamiltoniana data:

$$H(p, q) = p \dot{q} - L. \quad (1.34)$$

Analogamente, anche in meccanica dei mezzi continui, definiamo un momento canonicamente coniugato al campo φ :

$$\pi(x, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x, t)} \quad (1.35)$$

e una densità hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(\varphi, \pi) = \pi(x, t) \dot{\varphi}(x, t) - \mathcal{L}. \quad (1.36)$$

Fino a qui la trattazione dei campi è standard e puramente classica. Adesso vogliamo quantizzare questi campi. Per farlo, generalizziamo al continuo la procedura standard di quantizzazione degli operatori p e q (per semplicità di scrittura omettiamo i cappucci sopra gli operatori...) che, se poniamo anche $\hbar=1$, è data dalla condizione:

$$[\mathbf{q}_r(t), \mathbf{p}_s(t)] = i \delta_{rs} \quad \text{xxiii} \quad (1.37)$$

Perciò promuoviamo anche i nostri campi a operatori e scriviamo una generalizzazione dell'equazione precedente:

$$[\varphi(x,t), \pi(x,t)] = i\delta(x-y). \quad (1.38)$$

Come sappiamo, sotto condizioni abbastanza generali, ogni funzione può essere sviluppata in onde piane (cioè scritta come integrale di Fourier); in particolare per i nostri campi scriviamo, allora:

$$\begin{aligned} \varphi(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi 2\omega} \left[a(k) e^{i(kx-\omega t)} + a^+(k) e^{-i(kx-\omega t)} \right] \\ \pi(x,t) &= \dot{\varphi}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi 2\omega} (-i\omega) \left[a(k) e^{i(kx-\omega t)} - a^+(k) e^{-i(kx-\omega t)} \right] \end{aligned} \quad (1.39)$$

Come abbiamo detto più sopra, si può mostrare col calcolo che, perché tali funzioni soddisfino l'equazione delle onde, i coefficienti dello sviluppo devono soddisfare l'equazione dell'oscillatore armonico.

Nella nostra procedura di quantizzazione i campi diventano operatori ma, allora, anche i coefficienti \mathbf{a} e \mathbf{a}^+ devono diventarlo (mentre x e t ; k e ω sono solo delle etichette numeriche). Questo significa che il commutatore tra i campi scritto sopra si traduce nelle seguenti prescrizioni (dette *canonical commutation rule*) per \mathbf{a} e \mathbf{a}^+ :

$$[\mathbf{a}(k), \mathbf{a}^+(k')] = 4\pi\omega\delta(k-k'); \quad [\mathbf{a}(k), \mathbf{a}(k')] = [\mathbf{a}^+(k), \mathbf{a}^+(k')] = 0. \quad (1.40)$$

A questo punto abbiamo tutto quello che ci serve per trattare un campo libero quantizzato. Possiamo, per esempio, scrivere l'hamiltoniana e studiarne lo spettro: facendo un po' di conti e con l'uso delle ccr si trova, così, che c'è uno stato di minima energia (solitamente indicato con $|0\rangle$ e chiamato stato di vuoto) tale che ogni modo \underline{k} ha energia $\frac{1}{2}\omega$ in tale stato (ricordiamo che abbiamo posto $\hbar=1$). Questa energia, detta energia di punto zero, conduce ad una situazione problematica. Infatti, essendo i modi infiniti, la somma di tutte le energie “di punto zero”, diverge. D'altra parte le grandezze importanti, quelle misurabili, sono le differenze di energia e, così, possiamo trascurare questa costante infinita e stabilire che lo stato di vuoto ha energia zero per definizione (adottiamo, insomma, una soluzione analoga a quella già adottata da Dirac).

Si trova, poi, che gli altri autovalori dell'hamiltoniana sono dati dalla seguente espressione:

$$\int \frac{dk}{4\pi\omega} n(k)\omega \quad (1.41)$$

dove $n(k)$ è un numero naturale che “conta” il numero di quanti del modo k e energia ω . Gli operatori $\mathbf{a}(k)$ e $\mathbf{a}^+(k)$ hanno un nome suggestivo: si chiamano rispettivamente operatore di distruzione e operatore di creazione nel modo k ; in effetti la loro azione su un autostato caratterizzato da n quanti (nel nostro caso fotoni) è, rispettivamente, quello di far passare ad un altro autostato contenente un quanto in meno o uno in più. Possiamo, in maniera analoga a quanto fatto per l'energia, anche studiare altre osservabili, associate ad altri operatori; per esempio la quantità di moto o il momento angolare (*en passant* notiamo qui che non esiste un operatore posizione per i fotoni!).

Potremmo applicare il formalismo fin qui sinteticamente delineato (detto di “quantizzazione canonica”) a qualsiasi campo obbedente ad una equazione delle onde. In particolare potremmo applicarlo all'equazione di Dirac, pur di interpretare la funzione ψ come un campo. Se facessimo così otterremmo una quantizzazione del campo elettronico di Dirac ma, in tale quantizzazione, i suoi quanti (cioè gli elettroni), invece di essere considerati fermioni, sarebbero trattati come bosoni,

cosa evidentemente sbagliata! Infatti, nel formalismo precedentemente delineato, non c'è alcun meccanismo corrispondente al principio di Pauli...

Nel 1928 Jordan e Wigner riuscirono a risolvere il problema introducendo un particolare formalismo operatoriale, basato sempre sulle nozioni di operatori di creazione e di distruzione di eccitazioni elementari del campo. Questa volta (cioè nel caso di campi fermionici), però, gli operatori di creazione e di distruzione non soddisfano più le ccr ma delle altre regole di quantizzazione dette car (*canonical anticommutation rule*) che si ottengono dalle ccr trasformando i commutatori in anticommutatori, cioè prendendo il segno +, invece del -, nel commutatore. Operando in questo modo si riesce ad avere una quantizzazione del campo che permette, al massimo, ad un solo quanto per volta (trascuriamo per semplicità questioni legate allo *spin*) di "occupare" ciascun modo, come richiesto dal principio di Pauli. Con la tecnica dello sviluppo in integrale di Fourier e con l'introduzione degli operatori di creazione e di distruzione si riescono anche a risolvere i problemi interpretativi connessi al cosiddetto mare di Dirac; basta, per questo, pensare agli operatori di creazione e di distruzione degli stati di energia negativa come operatori "diversi", connessi alle eccitazioni di stati di antimateria...ma il discorso qui si fa troppo lungo e veramente troppo poco chiaro a questo livello della trattazione.

Alcuni problemi

Nonostante i vantaggi presentati, la teoria quantistica dei campi non si affermò immediatamente e soprattutto non soppiantò la visione la meccanica quantistica relativistica di Dirac, così che i fisici degli anni '30 sviluppavano calcoli con approcci un po' mescolati. Comunque nel 1929 Klein e Nishina calcolarono, utilizzando le tecniche dell'elettrodinamica quantistica, al primo ordine perturbativo, la sezione d'urto Compton (cioè per il processo $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$); Dirac nel 1930 calcolò la sezione d'urto per l'annichilazione elettrone positrone ($e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$); ci furono, inoltre molti altri calcoli di sezioni d'urto, sempre in elettrodinamica quantistica, e tutti davano buoni risultati, in accordo con i dati sperimentali. Ben presto, però, ci si rese conto che l'elettrodinamica quantistica da un lato non era sufficiente a interpretare il mondo noto delle particelle e da un altro che essa era affetta da un problema fondamentale: il problema degli infiniti. Per quanto riguarda il primo problema la teoria di Fermi del decadimento debole metteva in gioco nuove particelle, come il neutrino; nello studio della radiazione cosmica si identificarono muoni, pioni, kaoni ecc.; nel 1935 H. Yukawa propose una teoria quantistica dei campi per le interazioni nucleari... Per quanto riguarda il problema degli infiniti, si scoprì presto che moltissimi calcoli di elettrodinamica quantistica fornivano inequivocabilmente un terribile risultato: infinito! Questa nasceva dal fatto che la teoria descriveva campi che creavano o distruggevano particelle in precisi punti spaziotemporali, ed è chiaro che un elettrone puntiforme avrà una massa, generata dal suo campo elettrico che è ovviamente infinita! Il problema fu risolto da Gupta e Bleuler e Tomonaga e Schwinger solo nella seconda metà degli anni '40 e, in maniera maggiormente soddisfacente ancora più tardi con le tecniche dette di "rinormalizzazione". Pochi anni dopo Feynman sviluppò una tecnica differente, poi detta tecnica dei diagrammi di Feynman, nella quale si stabilivano delle regole grafiche, Lorentz invarianti ad ogni "passo", per calcolare gli elementi della cosiddetta matrice di *scattering* a ogni ordine della teoria perturbativa.

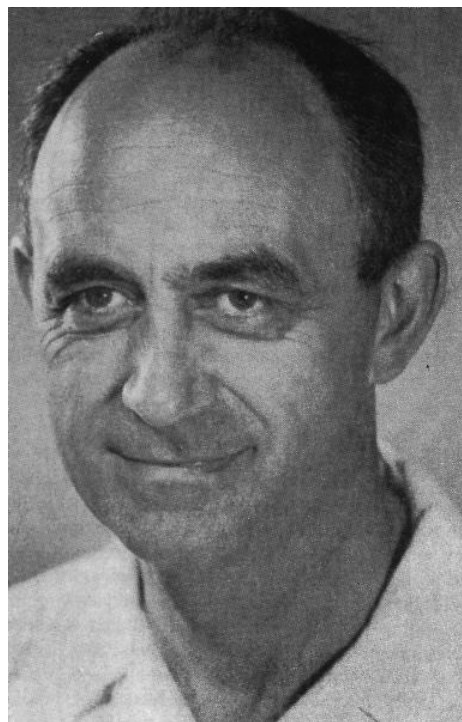


Fig. 1.19 Enrico Fermi
(Roma 1901, Chicago 1954).

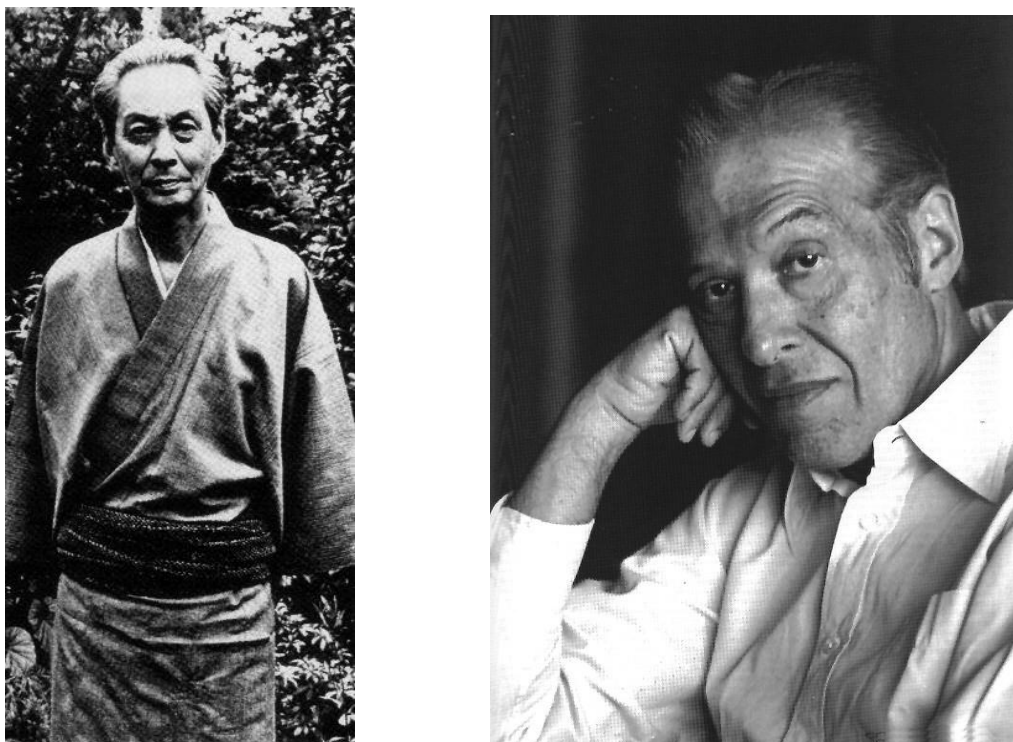


Fig. 1. 20 Sin-Itiro Tomonaga (Tokyo 1906, Tokyo 1979) e Julian Schwinger (New York 1918, Los Angeles 1994).

Campi in interazione

Vogliamo chiudere questa breve rassegna storica con l'osservazione che il motivo per cui è nata la teoria quantistica dei campi non è quello di descrivere campi liberi, ma quello di studiare campi interagenti fra loro (basta pensare al problema della stabilità radiativa dell'atomo). Infatti, nella descrizione data qui sopra non succede mai niente, neppure due elettroni interagiscono fra loro se non si pensa ad un meccanismo di "accoppiamento" al campo elettromagnetico. Quello descritto da tale teoria è un mondo in cui non succede alcunché...

Il motivo di questo sta nella linearità delle equazioni. Infatti, tanto per capire le cose, consideriamo due perturbazioni del campo (insomma due onde), in uno stato ad un solo quanto, e supponiamo che queste due onde viaggiano una verso l'altra; allora, per la linearità dell'equazione delle onde che le descrive, esse si "passeranno" una sull'altra senza alcuna interazione e proseguiranno indisturbate ciascuna come se l'altra non ci fosse, senza "urtarsi" (certamente, nel luogo in cui si sovrappongono esse daranno luogo a interferenza ma... attenzione che l'interferenza è, in effetti, un po' il contrario dell'interazione...). Se, quindi, vogliamo descrivere le interazioni in una teoria di campo, abbiamo una sola possibilità: siamo costretti a inserire termini non lineari nell'equazione delle onde. Dalle nuove equazioni possiamo poi ricavare l'hamiltoniana d'interazione ecc. ecc..

Dal punto di vista intuitivo la cosa non è difficile: per esempio l'interazione tra campo il elettronico e campo il elettromagnetico sarà descritta da una hamiltoniana di interazione che conterrà termini di accoppiamento tra le cariche elettriche e il campo elettromagnetico. Quindi, ripensando un po' al significato dell'equazione di Dirac, in tale hamiltoniana ci saranno dei termini quadratici in ψ (proporzionali alla densità di carica) e lineari nel potenziale (dal quale si ricava il campo elettromagnetico).

Insomma quello che ci preme osservare è che siamo passati da un modello di quantizzazione (la prima) nel quale la materia era quantizzata e interagiva col mondo perché soggetta a forze esterne, ad una descrizione (detta di seconda quantizzazione) in cui le forze esterne non ci sono più e le interazioni sono date da accoppiamenti non lineari fra i campi.

Vale la pena osservare che l'elettrodinamica quantistica, cioè la teoria quantistica dei campi di Dirac ed elettromagnetico in interazione fra loro, è la migliore teoria che mai sia stata fatta dall'uomo; nel senso che essa è riuscita a spiegare un'enorme mole di dati sperimentali fornendo risultati e previsioni straordinariamente accurati.

Oggi l'elettrodinamica quantistica fa parte di una teoria più generale, il cosiddetto "modello standard", formulato negli anni '70 da Glashow, Weinberg e Salam, che descrive bosoni e fermioni in interazione fra loro tramite le interazioni elettromagnetiche, deboli e forti; ma di questo qui non ci occupiamo.



Fig. 1.21 Sheldon Glashow (nato a New York nel 1932), Steven Weinberg (nato a New York nel 1933) e Abdus Salam (Jhangmaghiana 1926, Trieste 1996).

Breve riassunto di alcuni concetti fondamentali della teoria quantistica dei campi

Per concludere riassumiamo con parole imprecise ma molto semplici l'idea fondamentale delle teorie quantistiche dei campi.

1. Si considera inizialmente un campo classico, insomma una funzione dello spazio e del tempo, soddisfacente ad una certa equazione delle onde. Esempi sono il campo elettromagnetico rappresentato dal quadripotenziale vettore, il campo di Dirac rappresentato dalla funzione a quattro componenti ψ ecc. (come si vede, qui la ψ di Dirac non è più interpretata come una funzione d'onda, collegata a densità di probabilità ecc., ma come campo e basta; per di più, nonostante la presenza di \hbar l'equazione di Dirac viene "vista" come descrivente un campo classico...) ma ci possono essere anche campi scalari ecc..
2. Si scrive la lagrangiana da cui ricavare le equazioni delle onde e, nel caso interessante in cui si considerino le interazioni, anche la lagrangiana di interazione.
3. Si sviluppa il campo in integrale di Fourier (cioè come sovrapposizione dei suoi modi normali); in tal modo i coefficienti dello sviluppo dovranno soddisfare a certe condizioni, dovute al fatto che il campo soddisfa una precisa equazione. In generale si vede che queste condizioni sono quelle che impongono ai coefficienti di obbedire all'equazione di un oscillatore armonico.
4. A questo punto per introdurre la quantizzazione si promuovono le ampiezze di ciascun modo normale a operatori (detti operatori di creazione e di distruzione) scegliendo per essi, a seconda del caso, le ccr se trattiamo bosoni, o le car nel caso dei fermioni (e ricordandosi, però che sarà, in generale, necessario introdurre due tipi di operatori: quelli associati alla materia e quelli associati all'antimateria).

5. Si costruiscono a partire dal formalismo lagrangiano le grandezze che ci interessano (energia, momento angolare, ecc.); queste grandezze saranno operatori, espressi per mezzo degli operatori di creazione e di distruzione, di cui cercheremo gli autovalori, ecc., ecc..

In generale, così, ogni campo si separa in due “pezzi”: uno che rappresenta materia e l’altro antimateria e ciascuno di questi due “pezzi” viene descritto per mezzo di un numero infinito di oscillatori (uno per ogni modo); ogni oscillatore possiede un numero infinito di stati se il campo è bosonico, mentre ne possiede solo due se il campo è fermionico. Nel linguaggio espressivo, ma un po’ fuorviante delle particelle, si può così dire che, quando lo sviluppo del campo contiene il modo di frequenza ω con ampiezza corrispondente all’ n -esimo stato E_n dell’energia, allora abbiamo n quanti di energia $\hbar\omega$.

Le interazioni, poi, sono descritte introducendo nell’operatore hamiltoniano dei termini non lineari...

Conclusioni

Finiamo osservando che la procedura di quantizzazione canonica qui accennata è una procedura universale che è stata utilizzata con successo per quantizzare pressoché tutti i campi noti (a parte, forse, il solo campo gravitazionale della relatività generale); per esempio si possono così quantizzare le vibrazioni “sonore” nei solidi, ottenendo dei quanti, detti fononi, che sono indispensabili per spiegare il comportamento dei calori specifici a basse temperature o il comportamento dei materiali superconduttori. Pensandoci bene quanto siamo lontani dal concetto originale e un po’ ingenuo di particella...

La storia delle idee importanti non finisce certamente qui, finisce, invece, qui quanto scriviamo noi perché speriamo che gli aspetti storici indispensabili per una comprensione della nostra proposta didattica sulla fisica quantistica siano stati, almeno sommariamente, presentati.

NOTE CAPITOLO 1

ⁱ Infatti l'azione è una grandezza fisica che ha le dimensioni di un'energia per un tempo o, equivalentemente di una quantità di moto per uno spazio, così che il volume nello spazio delle fasi di una particella ha le dimensioni di un'azione.

Se le coordinate generalizzate q_i formano un set che specifica lo stato di un sistema, di cui T è l'energia cinetica e U è l'energia potenziale, allora la lagrangiana del sistema in esame è definita da:

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U.$$

L'azione del sistema è allora definita come:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

In fisica l'azione è una quantità interessante per esprimere i principi variazionali. Per esempio, e un po' rozzamente, se supponiamo che $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ sia una qualunque traiettoria virtuale (cioè essa non necessariamente è soluzione delle equazioni del moto), allora il principio di "minima azione" asserisce che il movimento fisico effettivo, nell'intervallo di tempo e tra le configurazioni fissate, è quello che rende minimo (o stazionario) l'integrale di azione:

$$S[q(t), t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t), t] dt$$

ⁱⁱ Einstein A., *Annalen der Physik*, **XVII** a, 132 (1905).

ⁱⁱⁱ G. Lewis fu un grandissimo chimico: stabilì la cosiddetta regola dell'ottetto già nel 1904, ben prima del modello di Rutherford, formulò una nuova teoria degli acidi e delle basi e, per primo, riuscì a separare notevoli quantità di acqua pesante. E' interessante il fatto che sia stato proprio un chimico, abituato parlare in termini di atomi, ioni ed elettroni, a coniare il termine "fotone".

^{iv} Thomson J. J., *Phil. Mag.*, **VII**, 237 (1904).

^v Rutherford E., *Phil. Mag.* **XXI**, 669 (1911).

^{vi} Bohr N., *Phil. Mag.*, **XXVI**, 1 (1913).

^{vii} Gli spettroscopisti classificavano le righe spettrali in termini di numeri d'onda (definiti come gli inversi, $1/\lambda$, delle lunghezze d'onda) e le raggruppavano, poi, in serie spettrali. Per l'idrogeno atomico si aveva che ogni riga era esprimibile attraverso la formula:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1.i)$$

con la costante R_H (detta appunto costante di Rydberg per l'idrogeno) che era conosciuta sperimentalmente con grande accuratezza:

$$R_H = 1.096776 \times 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

^{viii} Segrè E. " *Personaggi e scoperte della fisica contemporanea*", Oscar Saggi Mondatori 490, Arnoldo Mondadori Editore, Farigliano (Cn) (1996), 128.

^{ix} "O Stern e W. Gerlach fanno volare un fascio di vapore di atomi di argento attraverso un campo magnetico per determinare se gli atomi posseggano un momento magnetico e, in caso affermativo quale orientazione risulti agli stessi in seguito all'attraversamento del campo magnetico. Il loro esperimento dà luogo ad un risultato assai significativo: il momento magnetico di tutti gli atomi a seguito dell'attraversamento del campo coincide col verso delle linee di forza, e in particolare per circa metà degli atomi nel senso del campo, per l'altra metà nel senso opposto. Ciò comporta naturalmente la domanda in che modo gli atomi pervengano a questo orientamento." A. Einstein., P. Ehrenfest; Leida, Berlino, maggio giugno 1922.

^x La legge di Moseley stabilisce che nello spettro caratteristico dei raggi X le lunghezze d'onda delle righe emesse variano approssimativamente come l'inverso del quadrato del numero atomico dell'elemento.

^{xi} L'effetto Stark è quel fenomeno per cui, applicando ad una sostanza allo stato atomico un campo elettrico intenso e costante le righe del suo spettro di emissione o di assorbimento si separano in più linee vicine.

L'effetto Zeeman è un'alterazione nella struttura delle righe spettrali di un vapore metallico alcalino sottoposto a un campo magnetico: le righe dello spettro si separano in più righe molto vicine. L'effetto Zeeman presenta caratteristiche diverse a seconda dell'intensità del campo magnetico esterno; se questo è di "piccola intensità" le righe sono "molte", se invece il campo magnetico è sufficientemente intenso le righe spettrali, pur essendo in numero maggiore che nel caso di assenza del campo, si raggruppano in modo caratteristico fra di loro. Si chiama effetto Paschen-Back l'effetto che si ha nel passaggio dall'effetto Zeeman anomalo a quello normale al crescere dell'intensità del campo magnetico applicato.

L'effetto Ramsauer consiste nella una grande diminuzione del valore della sezione d'urto di elettroni contro atomi di gas nobili per certi precisi piccoli valori dell'energia (in genere minori di 1eV).

^{xii} Compton A., *Phys. Rev.* **XXI**, 483 (1923).

^{xiii} Bose S., *Zeit. Phys.*, **XXVI**, 178 (1924).

^{xiv} Possiamo riscrivere la (1.i) come differenza di due termini (detti termini spettrali) del tipo:

$$T_n = \frac{R_H}{n^2}$$

ottenendo:

$$\frac{1}{\lambda} = T_m - T_n \quad (1.ii)$$

La (1.ii) prende il nome di principio di combinazione di Ritz.

^{xv} Born M., *Zeit. Phys.* **XXXVII**, 863 (1926).

^{xvi} Born M., *Zeit. Phys.* **XXXVII**, 863 (1926).

^{xvii} J. Franck. *Inst.* **192**, 145 (1921).

^{xviii} Davisson C., Germer, L. H., *Phys. Rev.*, **30**, 705 (1927).

^{xix} Heisenberg W., *Zeit. Phys.* **XLIII**, 879 (1927).

^{xx} Si veda per questo il fondamentale lavoro: Einstein A., *Phys. Zeitschrift* **18**, 121 (1917).

^{xxi} La quantità

$$\rho \equiv k \operatorname{Im} \psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie\phi}{\hbar} \right) \psi$$

non è definita positiva. Infatti se pensiamo a ψ come ad una funzione oscillante nel tempo allora non c'è nessuna ragione perché la sua derivata rispetto al tempo non diventi (e anche "di tanto") negativa.

^{xxii} In fisica classica le grandezze variano con continuità, perciò non si può mai passare da una certa energia ad un'altra senza attraversare tutti i valori intermedi. Siccome c'è un *gap* di valori impossibili, una volta che abbiamo energie positive non riusciamo a "perdere energia" per arrivare a quelle negative. In ogni caso in relatività l'espressione dell'energia è:

$$E = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}$$

e non c'è alcun bisogno di "quadrare", mentre in fisica quantistica l'espressione è di tipo operatoriale e nell'equazione di Klein-Gordon gli operatori sono tutti al "quadrato" con le conseguenze che stiamo discutendo...

^{xxiii} Ricordiamo che, per definizione e senza adeguato rigore matematico, il commutatore tra due operatori **A** e **B** è così definito:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA} .$$